直径 2cm の 1 円玉 100 枚を長方形の箱の中に重ならないように平らに敷き詰める。このとき，敷き詰める長方形の底面積を最小にするには，どのようなサイズの長方形に，どのように並べればよいか求めよ。ただし，長方形の縦横とも長さは cm 単位で整数値とする。

（解）

100＝1×100＝2×50＝4×25＝5×20＝10×10 であるから、1 円玉を長方形の形に並べると，その箱の底面積はどれも 400cm^2 となる。これよりも小さくなる並べ方を考える。

俵積みの並べ方では，1 段目に n 枚並べると，2 段目は $(n-1)$ 枚，3 段目は n 枚，4 段目は $(n-1)$ 枚と，枚数は 2 段につき 1 枚ずつ減るが，段の高さは少しずつ減ることになる。

1 辺 2cm の正三角形の高さは $\sqrt{3}$ cm である。1 段目の高さは 2cm である。

右図は 6 段までの図である。1 円玉の中心をつないで正三角形を作ると，正三角形 5 個分の高さと 1 円玉 1 個分の直径の和 $2+5\sqrt{3}$ （≒10.66）がその高さとなる。

一般に，k 段までの高さ $f(k)$ は， $f(k)=2+\sqrt{3}(k-1)$ cm となる。

長方形積み k 段の高さと俵積み k 段の高さとの差が 1 円玉 1 枚分以上になるためには

$2k-\{2+\sqrt{3}(k-1)\}\geqq 2$ を解いて， $k\geqq\dfrac{4-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=5+2\sqrt{3}=8.46\cdots$

よって，俵積み 9 段で 1 段多く並べることができる。実際に， $f(9)=2+8\sqrt{3}=7.92<8$ である。

次に，1 段目に並べる枚数 n は，何枚以上のとき長方形に並べるより，俵積みに並べる方が多くなるか考える。

長方形積みで縦に 9 段，横に n 枚並べると 1 円玉の枚数は， $9n$ （枚）

一方，俵積みで 9 段と長方形積み 1 段を合わせた枚数を横に n 枚並べると 1 円玉の枚数は,

$9n-4+n=10n-4$ （枚）

後者の方の枚数が多くなるためには， $10n-4>9n$ を解いて， $n>4$

よって，最低でも 1 段目に 5 枚並べないと，並べる枚数を増やすことはできない。

［1］ $n=5$ のとき

1 段目から，俵積みに 5 枚，4 枚，5 枚，4 枚，…と並べて 100 枚になるのは,

$(5+4)\times 10+5+5=100$ であるから

そのときの高さは， $f(21)+2=2+20\sqrt{3}+2=4+20\sqrt{3}=38.64\cdots$ cm

よって，1 段目 10cm，高さ 39cm の長方形の面積は， $10\times 39=390$ cm^2

［2］ $n=6$ のとき

1 段目から，俵積みに 6 枚，5 枚，6 枚，5 枚，…と並べて 100 枚になるのは,

$(6+5)\times 8+6+6=100$ であるから

そのときの高さは， $f(17)+2=2+16\sqrt{3}+2=4+16\sqrt{3}=31.71\cdots$ cm

よって，1 段目 12cm，高さ 32cm の長方形の面積は， $12\times 32=384$ cm^2

［3］ $n=7$ のとき

1 段目から，俵積みに 7 枚，6 枚，7 枚，6 枚，…と並べて 100 枚になるのは,

$(7+6)\times 8=104$ であるから（1 円玉 4 枚分の空きができるが，高さは小さくなる。）

そのときの高さは， $f(16)=2+15\sqrt{3}=27.98\cdots$ cm

よって，1 段目 14cm，高さ 28cm の長方形の面積は，$14\times 28=392\,\mathrm{cm}^2$

［4］$n=8$ のとき

1 段目から，俵積みに 7 枚，6 枚，7 枚，6 枚，…と並べて 100 枚になるのは，

$(8+7)\times 7=105$ であるから（1 円玉 5 枚分の空きができるが，高さは小さくなる。）

そのときの高さは，$f(14)=2+13\sqrt{3}=24.51\cdots\mathrm{cm}$

よって，1 段目 16cm，高さ 25cm の長方形の面積は，$16\times 25=400\,\mathrm{cm}^2$

［5］$n=9$ のとき

1 段目から，俵積みに 9 枚，8 枚，9 枚，8 枚，…と並べて 100 枚になるのは，

$(9+8)\times 6=102$ であるから（1 円玉 2 枚分の空きができるが，高さは小さくなる。）

そのときの高さは，$f(12)=2+11\sqrt{3}=21.05\cdots\mathrm{cm}$

よって，1 段目 18cm，高さ 22cm の長方形の面積は，$18\times 22=396\,\mathrm{cm}^2$

［6］$n=10$ のとき

1 段目から，俵積みに 10 枚，9 枚，10 枚，9 枚，…と並べて 100 枚になるのは，

$(10+9)\times 5+10=105$ であるから（1 円玉 5 枚分の空きができるが，高さは小さくなる。）

そのときの高さは，$f(11)=2+10\sqrt{3}=19.32\cdots\mathrm{cm}$

よって，1 段目 20cm，高さ 20cm の長方形の面積は，$20\times 20=400\,\mathrm{cm}^2$

ここで，長方形の底面が正方形になったので，以下，調べる必要はない。

以上，［1］～［6］より，題意に最も適するのは，$n=6$ のときである。

（答）

サイズと底面積･･･$12\times 32=384\,\mathrm{cm}^2$

並べ方･･･1 段目から，俵積みに 6 枚，5 枚，6 枚，5 枚，･･･と 17 段積み，最後の 1 段は 1 枚ずつ 6 枚並べる。

（2016/2/3　時岡）