$a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$$

（証）$b-c=x, c-a=y, a-b=z$ とおくと，$x+y+z=0$ であるから，$x^3+y^3+z^3=3xyz$ ･･･①

である。$\because x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$ より

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

$$=1+\frac{x}{a}\left(\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)+1+\frac{y}{b}\left(\frac{a}{x}+\frac{c}{z}\right)+1+\frac{z}{c}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)=3+\frac{x}{a}\cdot\frac{bz+cy}{yz}+\frac{y}{b}\cdot\frac{az+cx}{xz}+\frac{z}{c}\cdot\frac{ay+bx}{xy}=☆$$

ここで,

$$\begin{aligned}&bz+cy\\&=b(a-b)+c(c-a)\\&=ab-b^2+c^2-ac\\&=a(b-c)-(b+c)(b-c)\\&=(a-b-c)(b-c)\\&=2ax\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&az+cx\\&=a(a-b)+c(b-c)\\&=a^2-ab+bc-c^2\\&=b(c-a)-(c+a)(c-a)\\&=(b-c-a)(c-a)\\&=2by\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&ay+bx\\&=a(c-a)+b(b-c)\\&=ac-a^2+b^2-bc\\&=c(a-b)-(a+b)(a-b)\\&=(c-a-b)(a-b)\\&=2cz\end{aligned}$$

であるから

$$☆=3+\frac{x}{a}\cdot\frac{2ax}{yz}+\frac{y}{b}\cdot\frac{2by}{xz}+\frac{z}{c}\cdot\frac{2cz}{xy}=3+\frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}=3+\frac{2\cdot 3xyz}{xyz}\quad \because ①より=9$$ （終証）

（2013/7/3　時岡）