

容器 A, B, C に、それぞれ p (%), q (%), r (%) ($p > q > r$) の食塩水が入っている。
 容器 A に入っている食塩水 a (g) から x (g) を容器 A₁ に、 y (g) を容器 A₂ に入れる。
 同様に、容器 B に入っている食塩水 b (g) から x (g) を容器 B₁ に、 y (g) を容器 B₂ に入れ、
 容器 C に入っている食塩水 c (g) から x (g) を容器 C₁ に、 y (g) を容器 C₂ に入れる。
 次に、B₂ と C₁ に入れた食塩水を容器 A に、C₂ と A₁ に入れた食塩水を容器 B に、A₂ と B₁ に入れた食塩水を容器 C に入れると、容器 A, B, C の濃度がすべて同じになった。このとき、 x , y の量をそれぞれ求めよ。

(解) A の濃度は、
$$\frac{\frac{p}{100}(a-x-y) + \frac{q}{100} \cdot y + \frac{r}{100} \cdot x}{a} \times 100 = \frac{p(a-x-y) + qy + rx}{a},$$

同様に B の濃度は、
$$\frac{px + q(b-x-y) + ry}{b},$$

C の濃度は、
$$\frac{py + qx + r(c-x-y)}{c}$$
 である。

これらはすべて同じになるので

$$\begin{cases} \frac{p(a-x-y) + qy + rx}{a} = \frac{px + q(b-x-y) + ry}{b} \dots \textcircled{1} \\ \frac{px + q(b-x-y) + ry}{b} = \frac{py + qx + r(c-x-y)}{c} \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①より $b\{ap - (p-r)x - (p-q)y\} = a\{bq + (p-q)x - (q-r)y\}$

ここで、 $p-q = \alpha, p-r = \beta, q-r = \gamma$ とおくと、

$$\begin{aligned} b(ap - \beta x - \alpha y) &= a(bq + \alpha x - \gamma y) \\ (a\alpha + b\beta)x + (b\alpha - a\gamma)y &= ab\alpha \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

②より $c\{bq + (p-q)x - (q-r)y\} = b\{cr + (q-r)x + (p-r)y\}$

$$\begin{aligned} c(bq + \alpha x - \gamma y) &= b(cr + \gamma x + \beta y) \\ (b\gamma - c\alpha)x + (b\beta + c\gamma)y &= bc\gamma \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

③ $\times (b\beta + c\gamma) -$ ④ $\times (b\alpha - a\gamma)$ より

$$\begin{aligned} x &= \frac{ab\alpha(b\beta + c\gamma) - bc\gamma(b\alpha - a\gamma)}{(a\alpha + b\beta)(b\beta + c\gamma) - (b\alpha - a\gamma)(b\gamma - c\alpha)} = \frac{b(ab\alpha\beta + ac\alpha\gamma - bc\alpha\gamma + ac\gamma^2)}{ab\alpha\beta + ac\alpha\gamma + b^2\beta^2 + bc\beta\gamma - b^2\alpha\gamma + bc\alpha^2 + ab\gamma^2 - ac\alpha\gamma} \\ &= \frac{ab\alpha\beta - bc\alpha\gamma + ca(\alpha + \gamma)\gamma}{a(\alpha\beta + \gamma^2) + b(\beta^2 - \alpha\gamma) + c(\alpha^2 + \beta\gamma)} \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha + \gamma = \beta$,

$$\alpha\beta + \gamma^2 = (p-q)(p-r) + (q-r)^2 = p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp,$$

$$\beta^2 - \alpha\gamma = (p-r)^2 - (p-q)(q-r) = p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp,$$

$$\alpha^2 + \beta\gamma = (p-q)^2 + (p-r)(q-r) = p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp \text{ であるから}$$

$$x = \frac{ab\alpha\beta - bc\alpha\gamma + ca\beta\gamma}{(a+b+c)(p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp)} = \frac{ab(p-q)(p-r) - bc(p-q)(q-r) + ca(p-r)(q-r)}{(a+b+c)(p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp)}$$

同様に

$$y = \frac{ca(p-q)(p-r) - ab(p-q)(q-r) + bc(p-r)(q-r)}{(a+b+c)(p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp)}$$

$$\begin{cases} x = \frac{ab(p-q)(p-r) - bc(p-q)(q-r) + ca(p-r)(q-r)}{(a+b+c)(p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp)} \\ y = \frac{ca(p-q)(p-r) - ab(p-q)(q-r) + bc(p-r)(q-r)}{(a+b+c)(p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp)} \end{cases} \dots (\text{答})$$

【補足】

$$p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp = \frac{1}{2} \{ (p-q)^2 + (p-r)^2 + (q-r)^2 \} \text{より}$$

$$x = \frac{2(ab\alpha\beta - bc\gamma\alpha + ca\beta\gamma)}{(a+b+c)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}, y = \frac{2(ca\alpha\beta - ab\gamma\alpha + bc\beta\gamma)}{(a+b+c)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \quad (\text{ただし, } \alpha = p-q, \beta = p-r, \gamma = q-r)$$

【具体例】

$$(a, b, c, p, q, r, x, y) = (525, 420, 630, 18, 12, 9, 162, 212), (600, 480, 840, 18, 15, 12, 205, 265)$$

(2015/2/12 時間)