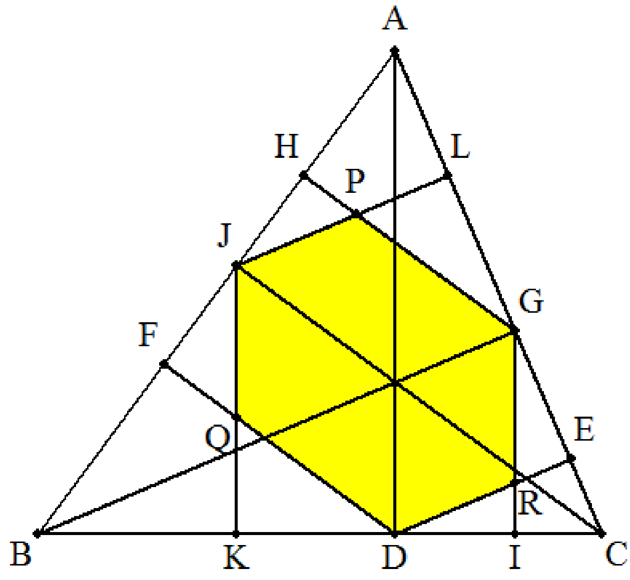
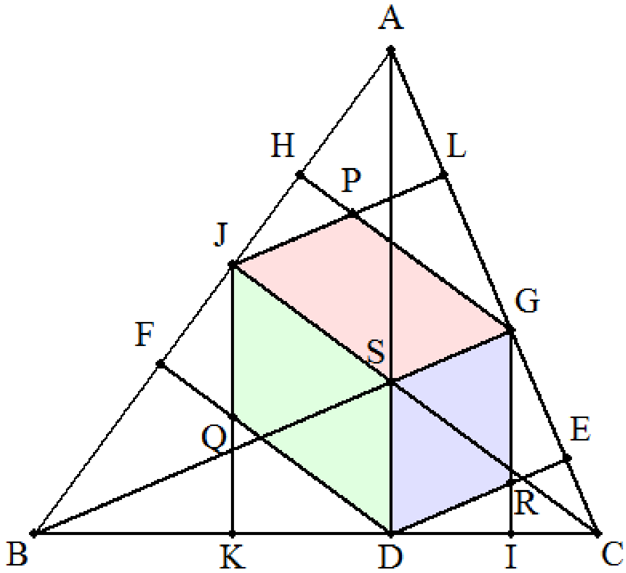
A313

△ABC において，頂点 A から BC に下ろした垂線の足を D，D から CA，AB に下ろした垂線の足を，それぞれ E，F とする。同様に，頂点 B から CA に下ろした垂線の足を G，G から AB，BC に下ろした垂線の足を，それぞれ H，I とし，頂点 C から AB に下ろした垂線の足を J，J から BC，CA に下ろした垂線の足を，それぞれ K，L とする。また，JL と GH，DF と JK，GI と DE の交点を，それぞれ P，Q，R とする。
このとき，六角形 DRGPJQ の面積を三角形の 3 辺 a,b,c を用いて表せ。



（解）六角形 DRGPJQ の面積は，3 つの平行四辺形 PJSG，QDSJ，RGSD の面積の和である。



∠BSD＝∠BCG＝C であるから

SD＝$\dfrac{BD}{\tan C}=\dfrac{c\cos B}{\tan C}=\dfrac{c\cos C\cos B}{\sin C}=2R\cos B\cos C$

∵　正弦定理より，$\dfrac{c}{\sin C}=2R$（R は△ABC の外接円の半径）であるから

同様に，SG＝$2R\cos C\cos A$，SJ＝$2R\cos A\cos B$

▱PJSG＝SG・SJ $\sin A$

$=2R\cos C\cos A\times 2R\cos A\cos B\times\sin A$

$=2aR\cos^2 A\cos B\cos C$

同様に，

▱QDSJ＝$2bR\cos A\cos^2 B\cos C$

▱RGSD＝$2cR\cos A\cos B\cos^2 C$

よって　六角形 DRGPJQ の面積 S_6 は

$S_6=2aR\cos^2 A\cos B\cos C+2bR\cos A\cos^2 B\cos C+2cR\cos A\cos B\cos^2 C$

$=2R\cos A\cos B\cos C(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$

ここで，△ABC の面積を S とおくと　$a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{8S^2}{abc}$ (*)である。

また，正弦定理を適用して，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{abc}{4R}$ より　$R=\dfrac{abc}{4S}$ であるから

$S_6=2\times\dfrac{abc}{4S}\times\cos A\cos B\cos C\times\dfrac{8S^2}{abc}=4S\cos A\cos B\cos C$

ここで，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$ であるから

$S_6=\dfrac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{8a^2b^2c^2}$ ・・・（答）

(*) $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{8S^2}{abc}$ の証明

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ であるから

左辺$=a\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\times\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+c\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$

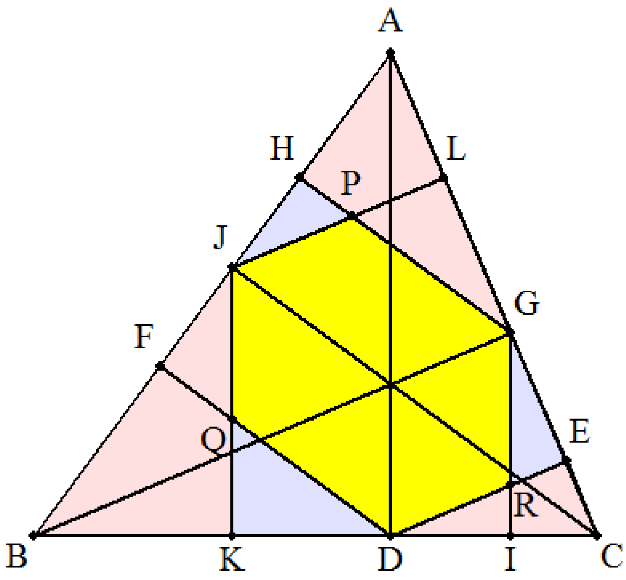
$=\dfrac{-a^4+2(b^2+c^2)a^2-(b^4-2b^2c^2+c^4)}{2abc}=\dfrac{4b^2c^2-a^4+2(b^2+c^2)a^2-(b^2+c^2)^2}{2abc}$

$=\dfrac{(2bc)^2-\{a^2-(b^2+c^2)\}^2}{2abc}=\dfrac{[2bc-\{a^2-(b^2+c^2)\}][2bc+\{a^2-(b^2+c^2)\}]}{2abc}=\dfrac{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}{2abc}$

$=\dfrac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2abc}=\dfrac{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)}{2abc}=\dfrac{8S^2}{abc}=$右辺

（別解）右の図のように，六角形 DRGPJQ の面積は，△ABC から赤 3 個の三角形と青 3 個の三角形を引けば求められる。

いま，BC＝a，CA＝b，AB＝c とおく。



JB＝$a\cos B$ であるから，

JK＝$a\cos B\sin B$，BK＝$a\cos^2 B$

また，BD＝$c\cos B$ であるから

DK＝BD－BK＝$c\cos B - a\cos^2 B$

△JBK∽△DQK で，

相似比が，

JK：DK＝$a\cos B\sin B : (c\cos B - a\cos^2 B)$

$= a\sin B : (c - a\cos B) = a\sin B : b\cos A$

$= 2R\sin A\sin B : 2R\sin B\cos A = 1 : \dfrac{\cos A}{\sin A}$

であるから，面積比は，$1 : \dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$

△JBK＝$\dfrac{1}{2}BK \times JK = \dfrac{1}{2}a\cos^2 B \times a\cos B\sin B = \dfrac{1}{2}a^2\sin B\cos^3 B$ であるから

△JBK＋△DQK＝$\dfrac{1}{2}a^2\sin B\cos^3 B\left(1+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right) = \dfrac{a^2\sin B\cos^3 B}{2\sin^2 A} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\sin A}\right)^2\sin B\cos^3 B$

ここで，△ABC の外接円の半径を R とすると，$\dfrac{a}{\sin A} = 2R, \sin B = \dfrac{b}{2R}$ であるから

△JBK＋△DQK＝$\dfrac{1}{2}(2R)^2 \times \dfrac{b}{2R} \times \cos^3 B = bR\cos^3 B$

同様に

△DCE＋△GRE＝$cR\cos^3 C$，△GAH＋△JPH＝$aR\cos^3 A$，

よって，赤 3 個の三角形と青 3 個の三角形の面積の和は

$$aR\cos^3 A + bR\cos^3 B + cR\cos^3 C = R(a\cos^3 A + b\cos^3 B + c\cos^3 C)$$

$$= \frac{abc}{4S}\left\{a\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^3 + b\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^3 + c\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^3\right\}$$

従って，六角形 DRGPJQ の面積は

$$S - \frac{abc}{4S}\left\{a\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^3 + b\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^3 + c\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^3\right\}$$

$$= \frac{1}{4S}\left[4S^2 - abc\left\{a\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^3 + b\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^3 + c\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^3\right\}\right]$$

$$= \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{8a^2b^2c^2}$$

（2014/12/29　時岡）