

A309 (不定方程式の応用問題)

52円切手 x 枚と 82円切手 y 枚を購入したら、代金が 2,300円であった。 x, y の値を求めよ。

(解1)

題意より $52x + 82y = 2300$

簡単にすると $26x + 41y = 1150 \cdots \textcircled{1}$

この不定方程式の整数解を求めるために右辺を1にした $26x + 41y = 1 \cdots \textcircled{2}$

を考える。右のユークリッドの互除法から

	1	2	1	1	1
3	4	11	15	26	41
	3	8	11	15	26
	1	3	4	11	15

$41 = 26 \times 1 + 15 \cdots \textcircled{3}$, $26 = 15 \times 1 + 11 \cdots \textcircled{4}$, $15 = 11 \times 1 + 4 \cdots \textcircled{5}$, $11 = 4 \times 2 + 3 \cdots \textcircled{6}$, $4 = 3 \times 1 + 1 \cdots \textcircled{7}$

である。⑦より

$$1 = 4 - 3 \times 1 = 4 - (11 - 4 \times 2) \times 1 \quad \textcircled{6} \text{より}$$

$$= 4 \times 3 - 11 \times 1 = (15 - 11 \times 1) \times 3 - 11 \times 1 \quad \textcircled{5} \text{より}$$

$$= 15 \times 3 - 11 \times 4 = 15 \times 3 - (26 - 15 \times 1) \times 4 \quad \textcircled{4} \text{より}$$

$$= 15 \times 7 - 26 \times 4 = (41 - 26 \times 1) \times 7 - 26 \times 4 \quad \textcircled{3} \text{より}$$

$$= 41 \times 7 - 26 \times 11$$

よって $26 \times (-11) + 41 \times 7 = 1$ となるので、②の1組の整数解は、 $x = -11, y = 7$ となるから、①の1組の整数解は、 $x = -11 \times 1150 = -12650, y = 7 \times 1150 = 8050$ となる。

従って、①のすべての解は $x = 41k - 12650 \cdots \textcircled{8}$, $y = -26k + 8050 \cdots \textcircled{9}$ (k は整数)

$x > 0, y > 0$ であるから

$$x > 0 \text{ とおくと, } k > \frac{12650}{41} = 308.5$$

$$y > 0 \text{ とおくと, } k < \frac{8050}{26} = 309.6$$

よって、 $k = 309$

これを⑧, ⑨に代入して

$$x = 19, y = 16 \cdots \text{(答)}$$

(解2) (解1) の点線で囲ってある部分を、次のとおり、計算することができる。

$26 = a, 41 = b$ において、上のユークリッドの互除法と同じ

計算をすると

$-11a + 7b = 1$ となるから、

$$26 \times (-11) + 41 \times 7 = 1$$

	1	2	1	1	1
8a-5b	-3a+2b	2a-b	-a+b	a	b
	8a-5b	-6a+4b	2a-b	-a+b	a
	-11a+7b	8a-5b	-3a+2b	2a-b	-a+b

(解3) (解1) の点線で囲ってある部分を、次のとおり、連分数を使っても計算できる。

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = 1 + \frac{4}{7} = \frac{11}{7} \text{ となるので}$$

$$\frac{41}{26} - \frac{11}{7} = \frac{41 \times 7 - 26 \times 11}{26 \times 7} = \frac{1}{26 \times 7}$$

(解4) 題意より $52x + 82y = 2300$

簡単にすると $26x + 41y = 1150$

$$x \text{ について解くと } x = \frac{-41y + 1150}{26} = \frac{26(-2y) + 11y + 26 \cdot 44 + 6}{26} = -2y + 44 + \frac{11y + 6}{26} \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{11y+6}{26} = k_1 \text{ (整数) とおける。}$$

$$y \text{ について解くと } y = \frac{26k_1 - 6}{11} = \frac{11 \cdot 2k_1 + 4k_1 - 6}{11} = 2k_1 + \frac{4k_1 - 6}{11} \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{4k_1 - 6}{11} = k_2 \text{ (整数) とおける。}$$

$$k_1 \text{ について解くと } k_1 = \frac{11k_2 + 6}{4} = \frac{4 \cdot 3k_2 - k_2 + 4 + 2}{4} = 3k_2 + 1 + \frac{-k_2 + 2}{4} \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{-k_2 + 2}{4} = k \text{ (整数) とおける。}$$

$$k_2 \text{ について解くと } k_2 = -4k + 2$$

$$\textcircled{3} \text{ より } k_1 = 3(-4k + 2) + 1 + k = -11k + 7$$

$$\textcircled{2} \text{ より } y = 2(-11k + 7) + (-4k + 2) = -26k + 16 \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } x = -2(-26k + 16) + 44 + (-11k + 7) = 41k + 19 \dots \textcircled{5}$$

$x > 0, y > 0$ であるから

$$x > 0 \text{ とおくと, } k > -\frac{19}{41}$$

$$y > 0 \text{ とおくと, } k < \frac{7}{11}$$

よって $k = 0$

これを, $\textcircled{5}$, $\textcircled{4}$ に代入して $x = 19, y = 16 \dots$ (答)

※この方法は, 1組の整数解を求めないで, いきなりすべての整数解が求められる。

【例】 $41x - 15y = 5$ のすべての整数解を求めよ。

$$\text{(解) } y \text{ について解くと } y = \frac{41x - 5}{15} = \frac{15 \times 3x - 4x - 5}{15} = 3x - \frac{4x + 5}{15} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{4x + 5}{15} = k_1 \text{ (整数) とおける。}$$

$$x \text{ について解くと } x = \frac{15k_1 - 5}{4} = \frac{4 \times 4k_1 - k_1 - 5}{4} = 4k_1 - 1 - \frac{k_1 + 1}{4} \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{k_1 + 1}{4} = k \text{ (整数) とおける。}$$

$$k_1 \text{ について解くと } k_1 = 4k - 1$$

$$\textcircled{2} \text{ より } x = 4(4k - 1) - 1 - k = 15k - 5$$

$$\textcircled{1} \text{ より } y = 3(15k - 5) - (4k - 1) = 41k - 14$$

よって $x = 15k - 5, y = 41k - 14$ (k は整数) \dots (答)

【練習問題】 52 円切手 x 枚と 82 円切手 y 枚を購入したら, 代金が 3,000 円であった。 x, y の値を求めよ。

$$x = 23, y = 22 \dots \text{(答)}$$

(2014/12/26 時岡)