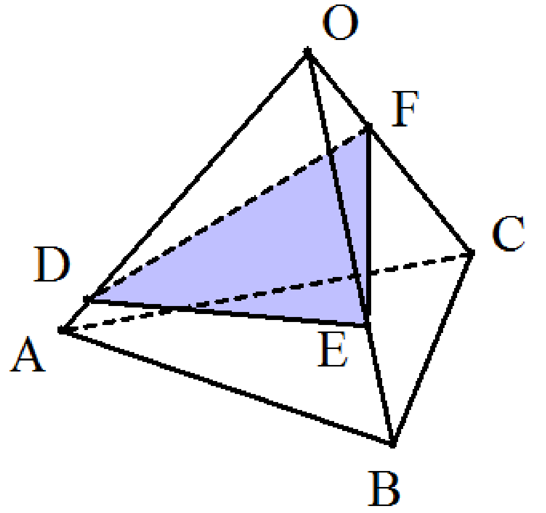
A305

<table>
<tr>
<td>正四面体 O-ABC の辺 OA，OB，OC 上にそれぞれ点 D，E，F を，OD＝a，OE＝b，OF＝c となるようにとる。このとき，
(1)　△DEF の面積 S を求めよ。
(2) 三角錐 O－DEF の体積 V を求めよ。</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

（解）(1) DE＝x，EF=y，FD＝z とおく。

△ODE に余弦定理を適用すると　$x^2=a^2+b^2-2ab\cos 60°=a^2-ab+b^2$

△OEF，△OFD からも同様に　$y^2=b^2-bc+c^2$，$z^2=c^2-ca+a^2$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4}\quad (*)$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)+2(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)+2(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)^2-(b^2-bc+c^2)^2-(c^2-ca+a^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)}\cdots\text{（答）}$$

(2)　$\overrightarrow{OD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OF}=\vec{c}$ とおき，O から△DEF に下した垂線の足を H とすると，

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，$s+t+u=1\cdots$①と表すことができる。

また，$\overrightarrow{DE}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{DF}=\vec{c}-\vec{a}$ である。

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{OH}=0$ より，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{OH}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})=s\vec{b}\cdot\vec{a}+t|\vec{b}|^2+u\vec{b}\cdot\vec{c}-s|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

ここで，$\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}=ba\cos 60°=\dfrac{ab}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{bc}{2}$，　$\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{ac}{2}$ であるから

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{OH}=s\cdot\frac{ab}{2}+tb^2+u\cdot\frac{bc}{2}-sa^2-t\cdot\frac{ab}{2}-u\cdot\frac{ac}{2}=\left(\frac{ab}{2}-a^2\right)s+\left(b^2-\frac{ab}{2}\right)t+\left(\frac{bc}{2}-\frac{ac}{2}\right)u=0\cdots②$$

同様に，$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{OH}=0$ より，$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{OH}=(\vec{c}-\vec{a})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})=\left(\dfrac{ac}{2}-a^2\right)s+\left(\dfrac{bc}{2}-\dfrac{ab}{2}\right)t+\left(c^2-\dfrac{ac}{2}\right)u=0\cdots$③

①，②，③を s,t,u について解くと　$s=\dfrac{bc(3bc-ca-ab)}{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)}$，

$$t=\frac{ca(3ca-ab-bc)}{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)},\quad u=\frac{ab(3ab-bc-ca)}{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)}\cdots④$$

よって，

$$|\overrightarrow{OH}|^2=(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})=s^2a^2+t^2b^2+u^2c^2+2\left(st\cdot\frac{ab}{2}+tu\cdot\frac{bc}{2}+us\cdot\frac{ca}{2}\right)$$

$$=s^2a^2+t^2b^2+u^2c^2+stab+tubc+usca=(sa+tb+uc)^2-(stab+tubc+usca)$$

これに④の 3 式を代入すると

$$=\left\{\frac{abc(ab+bc+ca)}{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)}\right\}^2+\frac{a^2b^2c^2\left\{5(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-6abc(a+b+c)\right\}}{\left\{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)\right\}^2}$$

$$=\frac{2a^2b^2c^2}{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)}$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{OH}\right|=\frac{\sqrt{2}abc}{\sqrt{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)}}$$

よって　$\mathrm{V}=\frac{1}{3}S\left|\overrightarrow{OH}\right|=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)}\cdot\frac{\sqrt{2}abc}{\sqrt{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)}}=\frac{\sqrt{2}}{12}abc\cdots$（答）

(*)　３辺 x,y,z の三角形の面積

$s=\frac{x+y+z}{2}$ とおくと，ヘロンの公式から

$$S=\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}=\sqrt{\frac{x+y+z}{2}\left(\frac{x+y+z}{2}-x\right)\left(\frac{x+y+z}{2}-y\right)\left(\frac{x+y+z}{2}-z\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}=\frac{1}{4}\sqrt{\left\{(y+z)^2-x^2\right\}\left\{x^2-(y-z)^2\right\}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left\{2yz+(y^2+z^2-x^2)\right\}\left\{2yz-(y^2+z^2-x^2)\right\}}=\frac{1}{4}\sqrt{(2yz)^2-(y^2+z^2-x^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4}$$

（2014/11/28　時岡）