

正多角形の対角線の交点の個数について

1 正 n 角形 (n は奇数) の場合

n 個の頂点の中から 4 点を選び、その 4 点を頂点に持つ四角形の対角線は 2 本で交点は 1 個できる。

1 つの交点を 3 本以上の対角線が通ることはないから、求める交点の個数は、

$$_nC_4 = \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3) \text{ (個)} \cdots \text{(答)}$$

2 正 n 角形 (n は偶数) の場合

具体例で考える。

(1) 正六角形の対角線の交点のうち、頂点を除く個数を求めよ。

(解) 正六角形を ABCDEF とし、中心を O とする。

6 個の頂点の中から 4 点を選び、その 4 点を頂点に持つ四角形の対角線は 2 本で交点は 1 個できる。

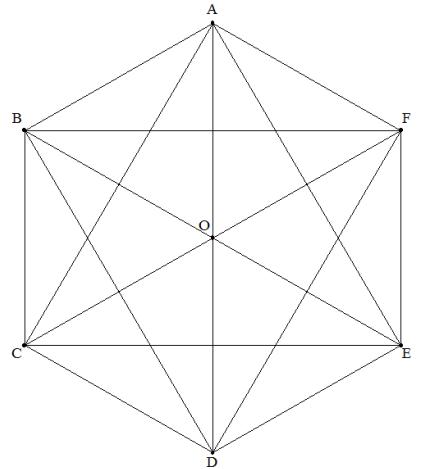
$$\text{よって交点の数は, } {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \quad \cdots \text{①}$$

しかし、中心 O においては、対角線は $6 \div 2 = 3$ 本通る。

3 本の対角線が集まる交点では、 ${}_3C_2 = 3$ 個分の交点が①に含まれている。

よって、求める交点の個数は重複する交点の個数を差し引いて

$$15 - 1 \times (3-1) = 13 \text{ (個)} \quad \cdots \text{(答)}$$



(2) 正八角形の対角線の交点のうち、頂点を除く個数を求めよ。

(解) 正八角形を ABCDEFGH とし、中心を O とする。

8 個の頂点の中から 4 点を選び、その 4 点を頂点に持つ四角形の対角線は 2 本で交点は 1 個できる。

$$\text{よって交点の数は, } {}_8C_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \quad \cdots \text{①}$$

しかし、正偶数角形なので、1 つの交点に 3 本以上の対角線が通る場合があるので、次にその個数を数える。

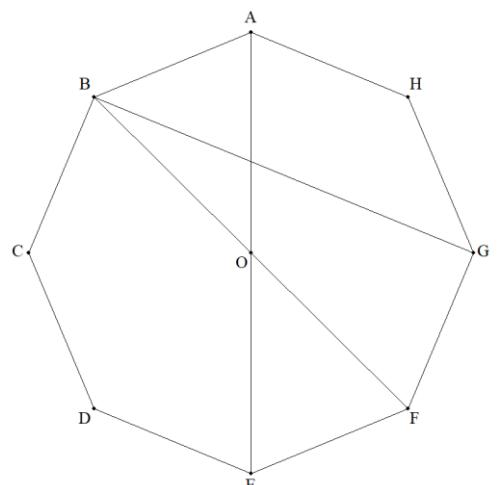
AE は中心 O を通る 1 つの対角線である。

AO と BG との交点では図形の対称性から対角線は 3 本通る。O においては、対角線は $8 \div 2 = 4$ 本通る。

3 本の対角線が集まる交点では、 ${}_3C_2 = 3$ 個分、4 本の対角線が集まる交点 O では、 ${}_4C_2 = 6$ 個分の交点が①に含まれている。

よって、求める交点の個数は重複する交点の個数を差し引いて

$$70 - 8 \times (3-1) - 1 \times (6-1) = 49 \text{ (個)} \quad \cdots \text{(答)}$$



(3) 正 10 角形の対角線の交点のうち、頂点を除く個数を求めよ。

(解) 正 10 角形を ABCDEFGHIJ とし、中心を O とする。

10 個の頂点の中から 4 点を選び、その 4 点を頂点に持つ四角形の対角線は 2 本で交点は 1 個できる。

$$\text{よって交点の数は, } {}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \quad \cdots \textcircled{1}$$

しかし、正偶数角形なので、1 つの交点に 3 本以上の対角線が通る場合があるので、次にその個数を数える。

AF は中心 O を通る 1 つの対角線である。

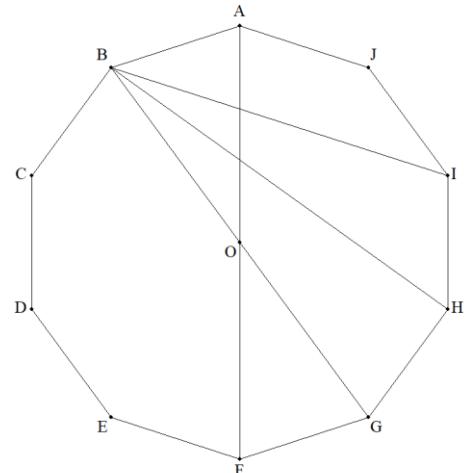
AO と BI, BH との 2 個の交点では図形の対称性から対角線は 3 本通る。

O においては、対角線は $10 \div 2 = 5$ 本通る。

3 本の対角線が集まる交点では、 ${}^3C_2 = 3$ 個分、5 本の対角線が集まる交点 O では、 ${}^5C_2 = 10$ 個分の交点が①に含まれている。

よって、求める交点の個数は重複する交点の個数を差し引いて

$$210 - 10 \times 2 \times (3-1) - 1 \times (10-1) = 161 \text{ (個)} \quad \cdots \text{ (答)}$$



(4) 正 12 角形の対角線の交点のうち、頂点を除く個数を求めよ。

(解) 正 12 角形以降からは、中心を通らない

対角線同士でも交点ができるところに注意。

2 本の対角線の交点の個数 228 (個)

3 本の対角線の交点の個数 60 (個)

4 本の対角線の交点の個数 12 (個)

6 本の対角線の交点の個数 1 (個)

よって、 $228 + 60 + 12 + 1 = 301$ (個) … (答)

【参考】

正 14 角形 757 (個)

正 16 角形 1377 (個)

正 18 角形 1837 (個)

正 20 角形 3841 (個)

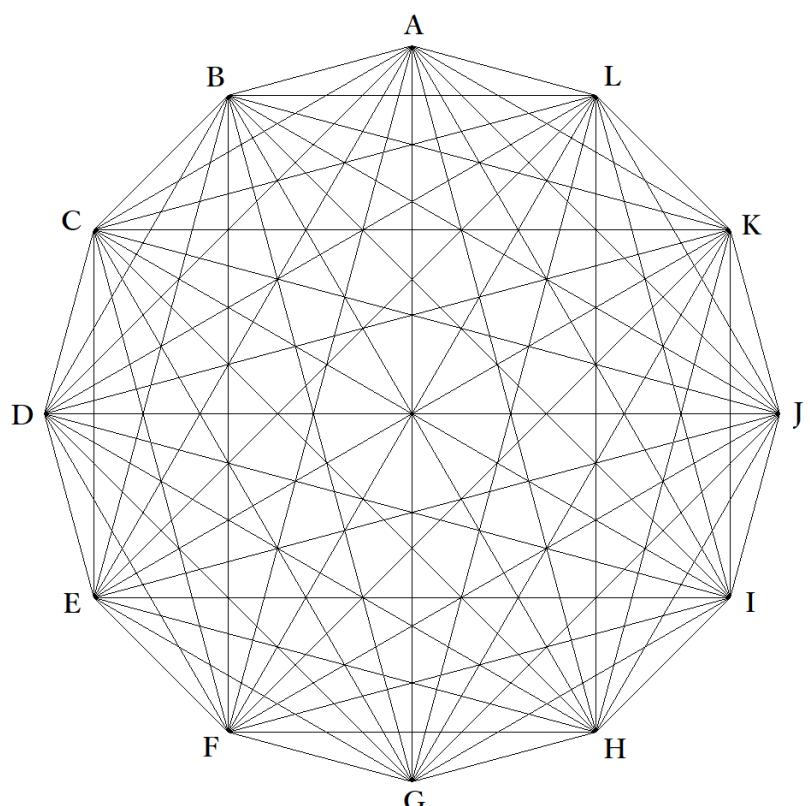
正 22 角形 5941 (個)

正 24 角形 7297 (個)

正 26 角形 12481 (個)

正 28 角形 17249 (個)

正 30 角形 16801 (個)



(2018/12/26 時岡)

(2021/4/21 時岡)