

微分法の公式

u, v, w : x の関数,

c : 実数の定数,

a : 1 でない正の数,

$\log x = \log_e x$: 自然対数,

e : 自然対数の底 ($e = 2.718281828459045 \dots$)

- ① $(c)' = 0$ 定数項の微分は 0
- ② $(cu)' = cu'$ 係数はそのまま
- ③ $(u \pm v)' = u' \pm v'$ (複号同順) 項別に微分する
- ④ $(uv)' = u'v + uv'$ 積の微分法
 $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$
- ⑤ $\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{uv' - vu'}{u^2}$ 商の微分法
- ⑥ $(f(u))' = f'(u) \times u'$ 合成関数の微分法
- ⑦ $(u^c)' = cu^{c-1} \times u'$
- ⑧ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \times u'$
- ⑨ $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$
- ⑩ $(\log_a u)' = \frac{1}{u \log a} \times u'$ 対数関数の微分
- ⑪ $(\log u)' = \frac{1}{u} \times u'$
- ⑫ $(a^u)' = a^u \log a \times u'$ 指数関数の微分
- ⑬ $(e^u)' = e^u \times u'$
- ⑭ $(\sin u)' = \cos u \times u'$ 正弦関数の微分
- ⑮ $(\cos u)' = -\sin u \times u'$ 余弦関数の微分
- ⑯ $(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \times u'$ 正接関数の微分
- ⑰ 対数微分法

【例.1】 $y = x^x (x > 0)$

両辺の自然対数をとると

$$\log y = x \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

$$\therefore y' = y(\log x + 1) = x^x (\log x + 1) \quad (\text{答})$$

【例.2】 $y = \sqrt[5]{\frac{(x+2)^2(x+3)^3}{(x+1)(x+4)^4}}$

両辺の絶対値をとり自然対数をとると

$$\log|y| = \frac{1}{5} \{2\log|x+2| + 3\log|x+3| - \log|x+1| - 4\log|x+4|\}$$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{1}{5} \left\{ \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x+4} \right\} \\ &= \frac{1}{5} \left\{ \frac{2(x+1) - (x+2)}{(x+1)(x+2)} + \frac{3(x+4) - 4(x+3)}{(x+3)(x+4)} \right\} \\ &= \frac{x}{5} \cdot \frac{(x+3)(x+4) - (x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{2x(2x+5)}{5(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\ \therefore y' &= \frac{2x(2x+5)}{5(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} y \\ &= \frac{2x(2x+5)}{5(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \sqrt[5]{\frac{(x+2)^2(x+3)^3}{(x+1)(x+4)^4}} \\ &= \frac{2x(2x+5)}{5\sqrt[5]{(x+1)^6(x+2)^3(x+3)^2(x+4)^9}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

⑱ 媒介変数表示と導関数

$$x = f(t), y = g(t) \text{ のとき, } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

【例】 $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= a(1 - \cos \theta), \frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta \text{ であるから} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{a \sin \theta}{a(1 - \cos \theta)} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

⑲ 陰関数の微分法

【例】 $x^2 + xy + y^2 = 1$

両辺を x で微分すると

$$2x + 1 \cdot y + xy' + 2yy' = 0$$

$x + 2y \neq 0$ のとき

$$\therefore y' = -\frac{2x + y}{x + 2y} \quad (\text{答})$$