

平方和の積

1. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ は次の 2 通りの 2 つの整式の平方の和に表される。証明は、展開結果が一致することから明らかである。

(1) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

(2) $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

つまり、2 つの整式の平方の和同士の積はまた 2 つの整式の平方の和として表されることになる。

2. 1.の結果を使用すると、 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)$ は次の 4 通りの 2 つの整式の平方の和に表される。

(1) $(ace+bde+adf-bcf)^2+(acf+bdf-ade+bce)^2$

(2) $(ace+bde-adf+bcf)^2+(acf+bdf+ade-bce)^2$

(3) $(ace-bde+adf+bcf)^2+(-acf+bdf+ade+bce)^2$

(4) $(-ace+bde+adf+bcf)^2+(acf-bdf+ade+bce)^2$

3. 2.の結果を使用すると、 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2)$ は次の 8 通りの 2 つの整式の平方の和に表される。

(1) $(aceg+bdeg+adfg-bcfg+acfh+bdfh-adeh+bceh)^2+(aceh+bdeh+adfh-bcfh-acfg-bdfg+adeg-bceg)^2$

(2) $(aceg+bdeg+adfg-bcfg-acfh-bdfh+adeh-bceh)^2+(aceh+bdeh+adfh-bcfh+acfg+bdfg-adeg+bceg)^2$

(3) $(aceg+bdeg-adfg+bcfg+acfh+bdfh+adeh-bceh)^2+(aceh+bdeh-adfh+bcfh-acfg-bdfg-adeg+bceg)^2$

(4) $(aceg+bdeg-adfg+bcfg-acfh-bdfh-adeh+bceh)^2+(aceh+bdeh-adfh+bcfh+acfg+bdfg+adeg-bceg)^2$

(5) $(aceg-bdeg+adfg+bcfg-acfh+bdfh+adeh+bceh)^2+(aceh-bdeh+adfh+bcfh+acfg-bdfg-adeg-bceg)^2$

(6) $(aceg-bdeg+adfg+bcfg+acfh-bdfh-adeh-bceh)^2+(aceh-bdeh+adfh+bcfh-acfg+bdfg+adeg+bceg)^2$

(7) $(-aceg+bdeg+adfg+bcfg+acfh-bdfh+adeh+bceh)^2+(-aceh+bdeh+adfh+bcfh-acfg+bdfg-adeg-bceg)^2$

(8) $(-aceg+bdeg+adfg+bcfg-acfh+bdfh-adeh-bceh)^2+(-aceh+bdeh+adfh+bcfh+acfg-bdfg+adeg+bceg)^2$

4. 3.の結果を使用すると、 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2)(i^2+j^2)$ は 16 通りの 2 つの整式の平方の和に表される。

(1) $(acegi+bdegi+adfgi-bcfgi+acfhi+bdfhi-adehi+bcehi+acehj+bdehj+adfhj-bcfhj-acfgj-bdfgj+adegj-bcegj)^2+(acegj+bdegj+adfgj-bcfgj+acfhj+bdfhj-adehj+bcehj-acehi-bdehi-adfhi+bcfhi+acfgi+bdfgi-adegi+bcegi)^2$

(2) $(acegi+bdegi+adfgi-bcfgi+acfhi+bdfhi-adehi+bcehi-acehj-bdehj-adfhj+bcfhj+acfgj+bdfgj-adegj+bcegj)^2+(acegj+bdegj+adfgj-bcfgj+acfhj+bdfhj-adehj+bcehj+acehi+bdehi+adfhi-bcfhi-acfgi-bdfgi+adegi-bcegi)^2$

(3) $\sim(16)$ 省略

(2001/4/15 のノートから 2013/6/1 時岡)