■$\prod_{k=1}^{n}(x+k)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$を展開したときの各項の係数について

立命館慶祥中学校・高等学校　時岡郁夫

（はじめに）

この問題は 2002 年 10 月にある高校 3 年生から紹介された問題です。

その友達とよく数学の問題を作ってみんなで解いたりしています。

その中に(x+1)(x+2)・・・・(x+n)の x の(n-3)乗の係数を求めるという問題がありました。

同年 10 月に，x^{n-5}の係数まで計算した結果を，「こだわり数学」9 の「(x+1)(x+2)・・・・(x+n)の展開」で解答例を公表しました。その後，x^{n-7}までの係数の求め方を公表しました。

今回，別な解答例を発見したので HP を 8 年振りに更新することにしました。x^{n-12}までの係数を求めています。時間さえあれば，x^{n-13}以降の係数も計算することが可能です。ただし，実際の$\sum$の計算では，mathematica を利用したことを補足しておきます。

（解）$\prod_{k=1}^{n}(x+k)=x^n+a(1,n)x^{n-1}+a(2,n)x^{n-2}+\cdots+a(n-1,n)x+a(n,n)$とおく。

ただし，$a(i,n)$はx^{n-i}の係数で，特に，$a(n,n)=n!$である。

このとき，

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x+k)=x^{n+1}+a(1,n+1)x^n+a(2,n+1)x^{n-1}+\cdots+a(n-1,n+1)x+(n+1)!\cdots①$$

となる。

一方，

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}(x+k)&=(x+n+1)\prod_{k=1}^{n}(x+k)\\&=(x+n+1)\left\{x^n+a(1,n)x^{n-1}+a(2,n)x^{n-2}+\cdots+a(n-1,n)x+n!\right\}\\&=x^{n+1}+\left\{a(1,n)+n+1\right\}x^n+\left\{a(2,n)+(n+1)a(1,n)\right\}x^{n-1}+\left\{a(3,n)+(n+1)a(2,n)\right\}x^{n-2}+\cdots\\&\quad+\left\{a(n,n)+(n+1)a(n-1,n)\right\}x+(n+1)!\cdots②\end{aligned}$$

であるから，①，②の各項の係数を比較して

$$\begin{cases}a(1,n+1)=a(1,n)+n+1\cdots(1)\\a(2,n+1)=a(2,n)+(n+1)a(1,n)\cdots(2)\\a(3,n+1)=a(3,n)+(n+1)a(2,n)\cdots(3)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a(i,n+1)=a(i,n)+(n+1)a(i-1,n)\cdots(i)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a(n,n+1)=a(n,n)+(n+1)a(n-1,n)\cdots(n)\end{cases}$$

(1)は階差数列の漸化式であるから

$$a(1,n)=a(1,1)+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$i\geqq 2$ のときも同様に

$a(i,n)=a(i,i)+\sum_{k=i+1}^{n}ka(i-1,k-1)=\sum_{k=i}^{n}ka(i-1,k-1)$ である。以下，順次，求めていく。

(1) $a(1,n)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2) (1)の結果で，n を $k-1$ に置き換えて(2)の漸化式に代入すると

$$a(2,n)=\sum_{k=2}^{n}k\times\frac{1}{2}(k-1)k=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}(k-1)k^2$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$$

(3) (2)の結果で，n を $k-1$ に置き換えて(3)の漸化式に代入すると

$$a(3,n)=\sum_{k=3}^{n}k\times\frac{1}{24}(k-2)(k-1)k(3k-1)=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{24}(k-2)(k-1)k^2(3k-1)$$

$$=\frac{1}{48}(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2$$

(4) 同様に(3)より

$$a(4,n)=\sum_{k=4}^{n}k\times\frac{1}{48}(k-3)(k-2)(k-1)^2k^2=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{48}(k-3)(k-2)(k-1)^2k^3$$

$$=\frac{1}{5760}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(15n^3+15n^2-10n-8)$$

(5) (4)より

$$a(5,n)=\sum_{k=5}^{n}\frac{1}{5760}(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)k^2(k+1)(15k^3-30k^2+5k+2)$$

$$=\frac{1}{11520}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2(3n^2-n-6)$$

(6) (5)より

$$a(6,n)=\sum_{k=6}^{n}\frac{1}{11520}(k-5)(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)^2k^3(3k^2-7k-2)$$

$$=\frac{1}{2903040}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(63n^5-315n^3-224n^2+140n+96)$$

(7) (6)より

$$a(7,n)=\sum_{k=7}^{n}\frac{1}{2903040}(k-6)(k-5)(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)k^2(63n^5-315n^4+315k^3+91k^2-42k-16)$$

$$=\frac{1}{5806080}(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2(9n^4-18n^3-57n^2+34n+80)$$

(8)　(7)より

$$a(8,n)=\sum_{k=8}^{n}\frac{1}{5806080}(k-7)(k-6)(k-5)(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)^2k^3\left(9k^4-54k^3+51k^2+58k+16\right)$$

$$=\frac{1}{1393459200}(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)$$

$$\times\left(135n^7-315n^6-1575n^5+735n^4+5320n^3+2820n^2-1936n-1152\right)$$

(9)　(8)より

$$a(9,n)=\sum_{k=9}^{n}\frac{1}{1393459200}(k-8)(k-7)(k-6)(k-5)(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)k^2$$
$$\times\left(135k^7-1260k^6+3150k^5-840k^4-2345k^3-540k^2+404k+144\right)$$

$$=\frac{1}{2786918400}(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2$$

$$\times\left(15n^6-75n^5-135n^4+527n^3+768n^2-668n-1008\right)$$

(10)　(9)より

$$a(10,n)=\sum_{k=10}^{n}\frac{1}{2786918400}(k-9)(k-8)(k-7)(k-6)(k-5)(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)^2k^3$$
$$\times\left(15k^6-165k^5+465k^4+17k^3-648k^2-548k-144\right)$$

$$=\frac{1}{367873228800}(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n$$

$$\times\left(99n^9-594n^8-1386n^7+6468n^6+14091n^5-12826n^4-44132n^3-18392n^2+14432n+7680\right)$$

(11)　(10)より

$$a(11,n)=\sum_{k=11}^{n}\frac{1}{367873228800}(k-10)(k-9)(k-8)(k-7)(k-6)(k-5)(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)k^2$$
$$\times\left(99k^9-1485k^8+6930k^7-8778k^6-8085k^5+8195k^4+11792k^3+2068k^2-2288k-768\right)$$

$$=\frac{1}{735746457600}(n-10)(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2$$

$$\times\left(9n^8-84n^7-6n^6+1152n^5+353n^4-5532n^3-4964n^2+6000n+6912\right)$$

(12)　(11)より

$$a(12,n)=\sum_{k=12}^{n}\frac{1}{735746457600}(k-11)(k-10)(k-9)(k-8)(k-7)(k-6)(k-5)(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)^2k^3$$
$$\times\left(9k^8-156k^7+834k^6-1080k^5-1927k^4+1252k^3+4156k^2+3056k+768\right)$$

$$=\frac{1}{24103053950976000}(n-11)(n-10)(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)$$

$$\times(12285n^{11}-135135n^{10}+2612610n^8+945945n^7-19594575n^6-25095070n^5+36656620n^4$$

$$+84764680n^3+28753088n^2-26133120n-12736512)$$

【係数一覧】

項	係数
x^{n}	1
x^{n-1}	$\frac{1}{2}n(n+1)$
x^{n-2}	$\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$
x^{n-3}	$\frac{1}{48}(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2$
x^{n-4}	$\frac{1}{5760}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(15n^3+15n^2-10n-8)$
x^{n-5}	$\frac{1}{11520}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2(3n^2-n-6)$
x^{n-6}	$\frac{1}{2903040}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(63n^5-315n^3-224n^2+140n+96)$
x^{n-7}	$\frac{1}{5806080}(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2(9n^4-18n^3-57n^2+34n+80)$
x^{n-8}	$\frac{1}{1393459200}(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)$ $\times(135n^7-315n^6-1575n^5+735n^4+5320n^3+2820n^2-1936n-1152)$
x^{n-9}	$\frac{1}{2786918400}(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2$ $\times(15n^6-75n^5-135n^4+527n^3+768n^2-668n-1008)$
x^{n-10}	$\frac{1}{367873228800}(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n$ $\times(99n^9-594n^8-1386n^7+6468n^6+14091n^5-12826n^4-44132n^3-18392n^2$ $+14432n+7680)$
x^{n-11}	$\frac{1}{735746457600}(n-10)(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2$ $\times(n+1)^2(9n^8-84n^7-6n^6+1152n^5+353n^4-5532n^3-4964n^2+6000n+6912)$
x^{n-12}	$\frac{1}{24103053950976000}(n-11)(n-10)(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)$ $\times(n-2)(n-1)n(n+1)(12285n^{11}-135135n^{10}+2612610n^8+945945n^7-19594575n^6$ $-25095070n^5+36656620n^4+84764680n^3+28753088n^2-26133120n-12736512)$

定数項は， $n!$ （2011/3/3）