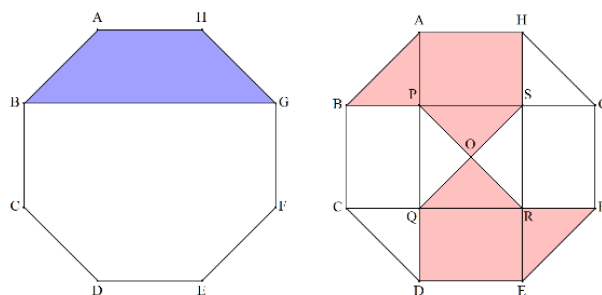


正九角形内のある台形の面積について

1 はじめに

2017年9月、民法のTV番組で中学生のクイズ日本一が放映されていた（番組名は正確ではない）。出場者の中に、数学オリンピック2連覇の中学生がいて、密着で紹介されていた。その中学生が、ある問題を考えていると、リポーターがどのような問題を考えているのか質問をした。「正八角形の面積が 100cm^2 のとき、台形（左側の図）の面積を求める問題」と答えていた。その問題の答は、放映されなかったの、私なりに考えてみ



た。右側の図より、 $\triangle HSG \equiv \triangle POS$ であるから、「 $(\text{台形}ABGH) = \frac{1}{4} (\text{正八角形}ABCDEFGH)$ 」となるので、答は、 25cm^2 である。

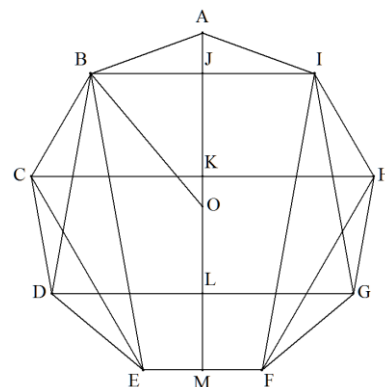
2 正九角形内のある台形の面積について

正八角形の問題にヒントを得て、正九角形にも面積比が整数になる台形があるかどうか調べてみた。

台形は、 $BCHI$, $CDGH$, $DEFG$, $BDGI$, $BEFI$, $CEFH$ の6通りが考えられる。

正九角形の外接円の中心を O 、 $OA=1$ 、直線 AO と BI , CH , DG , EF との交点をそれぞれ J , K , L , M 、正九角形の面積を S とする。

$$S = 9 \times \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin \frac{360^\circ}{9} \right) = \frac{9}{2} \sin 40^\circ \text{ である。}$$



$$(1) \text{ 台形}BCHI = \frac{1}{2}(BI + CH)JK = \frac{1}{2}(2\sin 40^\circ + 2\sin 80^\circ)(\cos 40^\circ - \cos 80^\circ)$$

$$= 2\sin 60^\circ \cos 20^\circ \times (-2)\sin 60^\circ \sin(-20^\circ) = 2\sin^2 60^\circ \sin 40^\circ = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sin 40^\circ = \frac{3}{2}\sin 40^\circ = \frac{1}{3}S \quad (\text{適})$$

$$(2) \text{ 台形}BDGI = \frac{1}{2}(BI + DG)(JO + OL) = \frac{1}{2}(2\sin 40^\circ + 2\sin 60^\circ)(\cos 40^\circ + \cos 60^\circ)$$

$$= 2\sin 50^\circ \cos 10^\circ \times 2\cos 50^\circ \cos 10^\circ = 4\cos^2 10^\circ \cos 40^\circ \sin 40^\circ = \frac{8\cos^2 10^\circ \cos 40^\circ}{9}S \quad (\text{不適})$$

$$(3) \text{ 台形}BEFI = \frac{1}{2}(BI + EF)(JO + OM) = \frac{1}{2}(2\sin 40^\circ + 2\sin 20^\circ)(\cos 40^\circ + \cos 20^\circ) = 2\sin 30^\circ \cos 10^\circ \times 2\cos 30^\circ \cos 10^\circ$$

$$= 2\sin 60^\circ \cos 10^\circ \sin 80^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 10^\circ \times 2\sin 40^\circ \cos 40^\circ = \frac{4\sqrt{3} \cos 10^\circ \cos 40^\circ}{9}S \quad (\text{不適})$$

$$(4) \text{ 台形}CDGH = \frac{1}{2}(CH + DG)KL = \frac{1}{2}(2\sin 80^\circ + 2\sin 60^\circ)(\cos 80^\circ + \cos 60^\circ) = 2\sin 70^\circ \cos 10^\circ \times 2\cos 70^\circ \cos 10^\circ$$

$$= 2\cos^2 10^\circ \sin 140^\circ = 2\cos^2 10^\circ \sin 40^\circ = \frac{4\cos^2 10^\circ}{9}S = \frac{2(1 + \cos 20^\circ)}{9}S \quad (\text{不適})$$

$$(5) \text{ 台形}CEFH$$

$$= \frac{1}{2}(CH + EF)(KO + OM) = \frac{1}{2}(2\sin 80^\circ + 2\sin 20^\circ)(\cos 80^\circ + \cos 20^\circ) = 2\sin 50^\circ \cos 30^\circ \times 2\cos 50^\circ \cos 30^\circ$$

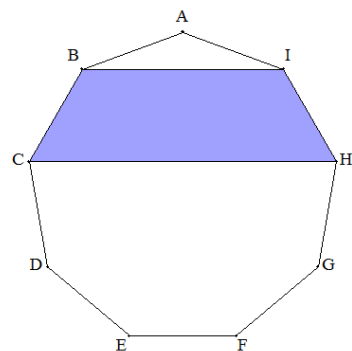
$$= 4\cos^2 30^\circ \cos 40^\circ \sin 40^\circ = 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cos 40^\circ \sin 40^\circ = \frac{2\cos 40^\circ}{3}S \quad (\text{不適})$$

$$(6) \text{ 台形}DEFG = \frac{1}{2}(DG + EF)LM = \frac{1}{2}(2\sin 60^\circ + 2\sin 20^\circ)(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)$$

$$= 2\sin 40^\circ \cos 20^\circ \times (-2)\sin 40^\circ \sin(-20^\circ) = 2\sin^2 40^\circ \sin 40^\circ = \frac{4\sin^2 40^\circ}{9}S = \frac{2(1 - \cos 80^\circ)}{9}S \quad (\text{不適})$$

この計算結果から作成したのが、次の問題である。また、その証明は中学生レベルでできる。

問題1 正九角形ABCDEFghiと台形BCHIの面積比が3:1となることを証明せよ。(中学生レベルで)



証明は、趣味の数学問題集 A372(2)を参照のこと。

3 補足

同様に、正七角形、正十角形、正12角形の場合を考えてみた。

(1) 正七角形の場合

正七角形ABCDEFgの外接円の中心をO, 面積をS, OA=1,

$$\angle AOB = \frac{2\pi}{7} = 2\theta \text{ とおく。} \left(\theta = \frac{\pi}{7} \right)$$

$$S = 7 \times \triangle OAB = 7 \times \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \sin 2\theta \right) = \frac{7}{2} \sin 2\theta \text{ である。}$$

$$\text{台形BCFG} = \frac{1}{2} (BG + CF) HI = \frac{1}{2} (2 \sin 2\theta + 2 \sin 3\theta) (\cos 2\theta + \cos 3\theta)$$

$$= 2 \sin \frac{5\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \times 2 \cos \frac{5\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin 5\theta 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin 2\theta = \frac{2(1 + \cos \theta)}{7} S$$

$$\text{台形CDEF} = \frac{1}{2} (CF + DE) IJ = \frac{1}{2} (2 \sin 3\theta + 2 \sin \theta) (\cos \theta - \cos 3\theta)$$

$$= 2 \sin 2\theta \cos \theta \times (-2) \sin 2\theta \sin(-\theta) = 2 \sin^2 2\theta \sin 2\theta = (1 - \cos 4\theta) \sin 2\theta = \frac{2(1 + \cos 3\theta)}{7} S$$

$$\text{台形BDEG} = \frac{1}{2} (BG + DE) HJ = \frac{1}{2} (2 \sin 2\theta + 2 \sin \theta) (\cos 2\theta + \cos \theta)$$

$$= 2 \sin \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \times 2 \cos \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin 3\theta = (1 + \cos \theta) \times 2 \sin 2\theta \cos 2\theta = \frac{4(1 + \cos \theta) \cos 2\theta}{7} S$$

$\cos \theta = \cos \frac{\pi}{7}$, $\cos 3\theta$, $(1 + \cos \theta) \cos 2\theta$ の値はどれも有理数でない (*) ので、どの台形の面積も正七角形の面積と整数比になることはない。

(*) の証明

(i) $\cos \theta$ の値について

$$\theta = \frac{\pi}{7} \text{ のとき, } \cos 4\theta + \cos 3\theta = 0 \quad \left\{ 2 \left(2 \cos^2 \theta - 1 \right)^2 - 1 \right\} + (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) = 0$$

$$\therefore 8 \cos^4 \theta + 4 \cos^3 \theta - 8 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 1 = 0$$

$$\text{両辺に2を掛けて, } 2 \cos \theta = x \text{ とおくと } x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (x+2)(x^3 - x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$x > 0 \text{ より, } x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

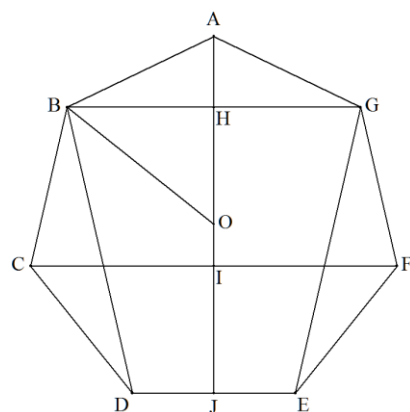
$P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ とおくと、定数項の約数 ± 1 に対して、 $P(-1) = 1 \neq 0$, $P(1) = -1 \neq 0$ であるから、有理数解をもたない。よって、 $\cos \theta = \frac{x}{2}$ は有理数ではない。

(ii) $\cos 3\theta$ の値について

$$3\theta = \frac{3\pi}{7} = \psi \text{ とおくと, } \cos 4\psi + \cos 3\psi = 0 \quad (\text{i}) \text{ と同様に, } \cos 3\theta \text{ は有理数ではない。}$$

(iii) $(1 + \cos \theta) \cos 2\theta$ の値について

$$(1 + \cos \theta) \cos 2\theta = (1 + \cos \theta) (2 \cos^2 \theta - 1) = \left(1 + \frac{x}{2} \right) \left\{ 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 - 1 \right\} = \frac{1}{4} (x^3 + 2x^2 - 2x - 4) = \frac{1}{4} \{ (x^3 - x^2 - 2x + 1) + (3x^2 - 5) \} = \star$$



ここで、(i)より $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ であるから

$$\star = \frac{1}{4}(3x^2 - 5) = \frac{1}{4}\{3(2\cos\theta)^2 - 5\} = \frac{1}{4}\{6(1 + \cos 2\theta) - 5\} = \frac{1}{4}(1 + 6\cos 2\theta)$$

$$2\theta = \frac{2\pi}{7} = \psi \text{ とおくと, } \cos 4\psi - \cos 3\psi = 0 \quad \left\{2(2\cos^2\psi - 1)^2 - 1\right\} - (4\cos^3\psi - 3\cos\psi) = 0$$

$$\therefore 8\cos^4\psi - 4\cos^3\psi - 8\cos^2\psi + 3\cos\psi + 1 = 0$$

$$\text{両辺に2を掛けて, } 2\cos\psi = x \text{ とおくと } x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0 \quad (x-2)(x^3 + x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$x < 2 \text{ より, } x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

$P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ とおくと、定数項の約数 ± 1 に対して、 $P(-1) = 1 \neq 0, P(1) = -1 \neq 0$ であるから、有理数解をもたない。よって、 $\cos\psi = \cos 2\theta = \frac{x}{2}$ は有理数ではない。

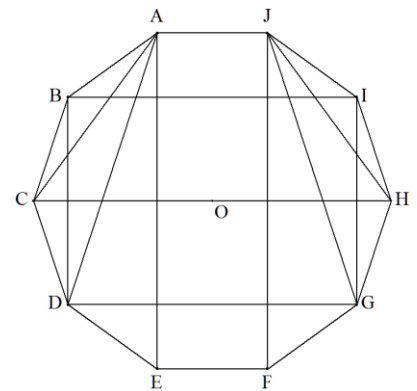
したがって、 $(1 + \cos\theta)\cos 2\theta$ の値は有理数でない。■

※ 2の(2)から(6)の不適になる（Sの係数が有理数にならない）証明も同様にできる。

(2) 正十角形の場合

4つの台形ABIJ, ACHJ, ADGJ, BCHIと2つの長方形AEFJ, BDGIが考えられる。（台形と長方形の面積の計算は紙面の関係で省略する。）

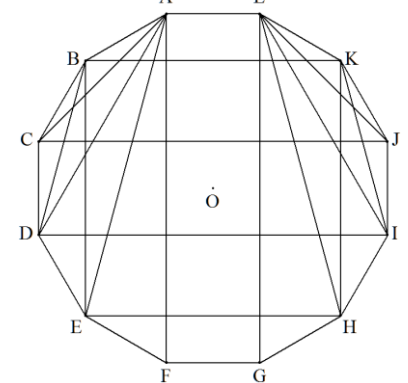
面積比が整数になるのは、(正十角形) : (長方形AEFJ) = 5 : 2 だけである。



(3) 正12角形の場合

6個の台形ABKL, ACJL, ADIL, AEHL, BCJK, BDIKと、長方形AFGL, 正方形BEHKについて、面積比が整数になるのは、次の通りである。（台形、長方形、正方形の面積の計算は紙面の関係で省略する。）

(正12角形) : (正方形BEHK) : (台形ADIL) : (長方形AFGL) : (台形BCJK) : (台形ABKL) = 12 : 8 : 6 : 4 : 3 : 1

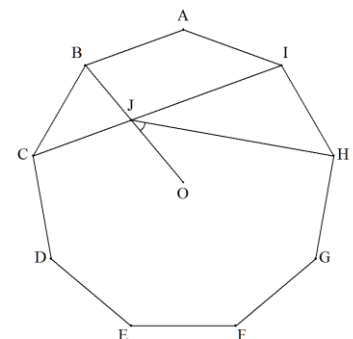


4 終わりに

正11角形については、まだ計算していないが、面積比が整数になる場合はないのではと予想している。

最後に、上述の問題1を中学生レベルでできないか考えている過程で、次の証明問題を作成した。この証明も中学生レベルできる。

問題2 正九角形ABCDEFGHIの外接円の中心をOとし、OBとCIの交点をJとすると、 $\angle OJH = 40^\circ$ となることを証明せよ。



証明は趣味の数学問題集A373を参照のこと。

(2017/9/18 時岡)