n 次方程式の n 個の解の k 乗の和の求め方について

1　はじめに

問題解法代数学辞典（参考文献）の第８編　方程式の理論　第３章　四次方程式及び高次方程式　6.その他に，次の問題と解答が掲載されている。

3051. ある四次方程式の四つの根の１乗，２乗，３乗，４乗の和がそれぞれ　u_1, u_2, u_3, u_4 であるという。この方程式を求めよ。

$\boxed{\text{解}}$　求める四次方程式を　$f(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$

とすれば，微分を用いて　$\dfrac{xf'(x)}{f(x)} = \dfrac{4x^4 + 3px^3 + 2qx^2 + rx}{x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s}$

そこで普通の割り算をすれば

$$4 - \frac{p}{x} + \frac{p^2 - 2q}{x^2} + \frac{-p^3 + 3pq - 3r}{x^3} + \frac{p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2 - 4s}{x^4} + \cdots$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad & u_1 = -p \\ & u_2 = p^2 - 2q \\ & u_3 = -p^3 + 3pq - 3r \\ & u_4 = p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2 - 4s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad & p = -u_1 \\ & q = \frac{1}{2}\left(u_1{}^2 - u_2\right) \\ & r = \frac{1}{6}\left(-u_1{}^3 + 3u_1u_2 - 2u_3\right) \\ & s = \frac{1}{24}\left(u_1{}^4 - 6u_1{}^2u_2 + 8u_1u_3 + 3u_2{}^2 - 6u_4\right) \end{aligned}$$

故に求める四次方程式は

$$x^4 - u_1x^3 + \frac{1}{2}\left(u_1{}^2 - u_2\right)x^2 + \frac{1}{6}\left(-u_1{}^3 + 3u_1u_2 - 2u_3\right)x + \frac{1}{24}\left(u_1{}^4 - 6u_1{}^2u_2 + 8u_1u_3 + 3u_2{}^2 - 6u_4\right) = 0$$

2　証明

上の解答に使用されている

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{4x^4+3px^3+2qx^2+rx}{x^4+px^3+qx^2+rx+s}$$

$$=4-\frac{p}{x}+\frac{p^2-2q}{x^2}+\frac{3pq-3r-p^3}{x^3}+\frac{4pr+2q^2-4p^2q+p^4-4s}{x^4}+\cdots$$

$$=u_0+\frac{u_1}{x}+\frac{u_2}{x^2}+\frac{u_3}{x^3}+\cdots$$

の証明を試みたい。ただし，u_k は 4 次方程式の 4 個の解の k 乗の和を表す。

> n 次方程式 $f(x)=0$ の n 個の解の k 乗の和を u_k とおくと，$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k}{x^k}$ である。

$\boxed{\text{証}}$　n 次方程式 $f(x)=0$ の n 個の解 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ の k 乗の和を u_k とおく。

すなわち，$u_k=\alpha_1{}^k+\alpha_2{}^k+\cdots+\alpha_n{}^k$

$a\neq 0$ として，$f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ とおける。

両辺の絶対値をとってから対数をとると，

$$\log|f(x)|=\log|a|+\sum_{i=1}^{n}\log|x-\alpha_i|$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_i}$$

両辺に x を掛けると，

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{x-\alpha_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{\alpha_i}{x}}\cdots①$$

$\max\left(\left|\frac{\alpha_1}{x}\right|,\left|\frac{\alpha_2}{x}\right|,\cdots,\left|\frac{\alpha_n}{x}\right|\right)<1$ なる十分大きい x に対して（※），①の右辺は，

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha_i}{x}+\frac{\alpha_i{}^2}{x^2}+\cdots\right)$$

$$=\left(1+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_1{}^2}{x^2}+\cdots\right)+\left(1+\frac{\alpha_2}{x}+\frac{\alpha_2{}^2}{x^2}+\cdots\right)+\cdots+\left(1+\frac{\alpha_n}{x}+\frac{\alpha_n{}^2}{x^2}+\cdots\right)$$

$$=u_0+\frac{u_1}{x}+\frac{u_2}{x^2}+\cdots$$

$\therefore\ \dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k}{x^k}$　（公式）　$\boxed{\text{終証}}$

３　２の公式の利用例

n 次方程式の n 個の解の k 乗の和の求め方について，k の値が $k=2,3$ くらいまでなら，対称式を利用するのが一般的で，それ以上になると漸化式を利用する求め方も知られている。しかし，次の例題なら，上の公式を使うと単純計算で求めることができる。

【例 1】4 次方程式 $x^4+4x^3+x^2+x+1=0$ の 4 つの解の 10 乗の和を求めよ。

$\boxed{解}$　$f(x)=x^4+4x^3+x^2+x+1$ とおくと，$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\dfrac{4x^4+12x^3+2x^2+x}{x^4+4x^3+x^2+x+1}$

分母，分子の多項式の各係数を掃き出し，次の単純計算をする。

	4	−4	14	−55	206	−779	2951	−11176	42326	−160300	607099			
1 4 1 1 1	4	12	2	1	0									
	4	16	4	4	4									
		−4	−2	−3	−4									
		−4	−16	−4	−4	−4								
			14	1	0	4								
			14	56	14	14	14							
				−55	−14	−10	−14							
				−55	−220	−55	−55	−55						
					206	45	41	55						
					206	824	206	206	206					
						−779	−165	−151	−206					
						−779	−3116	−779	−779	−779				
							2951	628	573	779				
							2951	11804	2951	2951	2951			
								−11176	−2378	−2172	−2951			
								−11176	−44704	−11176	−11176	−11176		
									42326	9004	8225	11176		
									42326	169304	42326	42326	42326	
										−160300	−34101	−31150	−42326	
										−160300	−641200	−160300	−160300	−160300
											607099	129150	117974	160300

よって，4 つの解の 10 乗の和は，607099　…　$\boxed{答}$

【例 2】ある n 次方程式の n 個の解の 1 乗，2 乗，$\cdots$，n 乗の和を，それぞれ $u_1,u_2,\cdots,u_n$ とする。

$n=2$，$n=3$，$n=4$，$n=5$，$n=6$ のとき，この方程式をそれぞれ求めよ。

※$n=4$ のとき，冒頭の問題 3051 である。

解　公式 $\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{u_k}{x^k}$ を使って，順次計算すると，

$n=2$ のとき

$$x^2-u_1x+\frac{1}{2}\left(u_1^{\ 2}-u_2\right)=0$$

$n=3$ のとき

$$x^3-u_1x^2+\frac{1}{2}\left(u_1^{\ 2}-u_2\right)x+\frac{1}{6}\left(-u_1^{\ 3}+3u_1u_2-2u_3\right)=0$$

$n=4$ のとき

$$x^4-u_1x^3+\frac{1}{2}\left(u_1^{\ 2}-u_2\right)x^2+\frac{1}{6}\left(-u_1^{\ 3}+3u_1u_2-2u_3\right)x+\frac{1}{24}\left(u_1^{\ 4}-6u_1^{\ 2}u_2+8u_1u_3+3u_2^{\ 2}-6u_4\right)=0$$

$n=5$ のとき

$$x^5-u_1x^4+\frac{1}{2}\left(u_1^{\ 2}-u_2\right)x^3+\frac{1}{6}\left(-u_1^{\ 3}+3u_1u_2-2u_3\right)x^2+\frac{1}{24}\left(u_1^{\ 4}-6u_1^{\ 2}u_2+8u_1u_3+3u_2^{\ 2}-6u_4\right)x$$
$$+\frac{1}{120}\left(-u_1^{\ 5}+10u_1^{\ 3}u_2-20u_1^{\ 2}u_3-15u_1u_2^{\ 2}+30u_1u_4+20u_2u_3-24u_5\right)=0$$

$n=6$ のとき

$$x^6-u_1x^5+\frac{1}{2}\left(u_1^{\ 2}-u_2\right)x^4+\frac{1}{6}\left(-u_1^{\ 3}+3u_1u_2-2u_3\right)x^3+\frac{1}{24}\left(u_1^{\ 4}-6u_1^{\ 2}u_2+8u_1u_3+3u_2^{\ 2}-6u_4\right)x^2$$
$$+\frac{1}{120}\left(-u_1^{\ 5}+10u_1^{\ 3}u_2-20u_1^{\ 2}u_3-15u_1u_2^{\ 2}+30u_1u_4+20u_2u_3-24u_5\right)x$$
$$+\frac{1}{720}(u_1^{\ 6}-15u_1^{\ 4}u_2+40u_1^{\ 3}u_3+45u_1^{\ 2}u_2^{\ 2}-90u_1^{\ 2}u_4-120u_1u_2u_3+144u_1u_5-15u_2^{\ 3}+40u_3^{\ 2}$$
$$+90u_2u_4-120u_6)=0$$

※この結果から分かることは，n 次方程式の係数は，x^n の係数を 1 としたとき，順に

$$1,-u_1,\frac{1}{2}\left(u_1^{\ 2}-u_2\right),\frac{1}{6}\left(-u_1^{\ 3}+3u_1u_2-2u_3\right),\frac{1}{24}\left(u_1^{\ 4}-6u_1^{\ 2}u_2+8u_1u_3+3u_2^{\ 2}-6u_4\right),$$
$$\frac{1}{120}\left(-u_1^{\ 5}+10u_1^{\ 3}u_2-20u_1^{\ 2}u_3-15u_1u_2^{\ 2}+30u_1u_4+20u_2u_3-24u_5\right),$$
$$\frac{1}{720}(u_1^{\ 6}-15u_1^{\ 4}u_2+40u_1^{\ 3}u_3+45u_1^{\ 2}u_2^{\ 2}-90u_1^{\ 2}u_4-120u_1u_2u_3+144u_1u_5-15u_2^{\ 3}+40u_3^{\ 2}+90u_2u_4$$
$$-120u_6),\cdots$$

であるということ。

4　補足

（※）の部分で，$f(x)=a(x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)=0$ の 1 つの解を α とするとき，$|\alpha|<\max(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|)+1$ が成り立つことを証明する。

これが証明されると，$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k}{x^k}$ は実際，$|x|>\max(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|)+1$ なる x で成り立つことになる。

$\boxed{\text{証}}$　$\max(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|)=m$ とおくと，題意より，$m>0$ である。

今，$|\alpha|\geqq m+1\cdots$①と仮定する。

$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ より，

$x^n=-a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-\cdots-a_{n-1}x-a_n$

両辺の絶対値をとり，$x=\alpha$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
|\alpha|^n&=|-a_1\alpha^{n-1}-a_2\alpha^{n-2}-\cdots-a_{n-1}\alpha-a_n|\leqq|a_1||\alpha|^{n-1}+|a_2||\alpha|^{n-2}+\cdots+|a_{n-1}||\alpha|+|a_n|\\
&\leqq m(|\alpha|^{n-1}+|\alpha|^{n-2}+\cdots+|\alpha|+1)\quad \because |a_1|\leqq m,|a_2|\leqq m,\cdots,|a_n|\leqq m\text{より}\\
&=\frac{m(|\alpha|^n-1)}{|\alpha|-1}\leqq\frac{m(|\alpha|^n-1)}{m}\quad \because \text{①より},|\alpha|-1\geqq m>0,|\alpha|>1\text{であるから}\\
&=|\alpha|^n-1
\end{aligned}
$$

よって，$|\alpha|^n\leqq|\alpha|^n-1$ となり，この不合理は①の仮定が原因である。

従って，$|\alpha|<\max(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|)+1$　$\boxed{\text{終証}}$

【参考文献】

[1]　問題解法代数学辞典（笹部貞市郎著，昭和 45 年 5 月 1 日初版第 27 刷，聖文社，定価 3,500 円）

[2]　時岡郁夫の Website（http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/）こだわり数学　11

（2014/10/19　時岡）