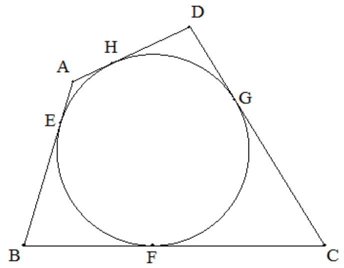
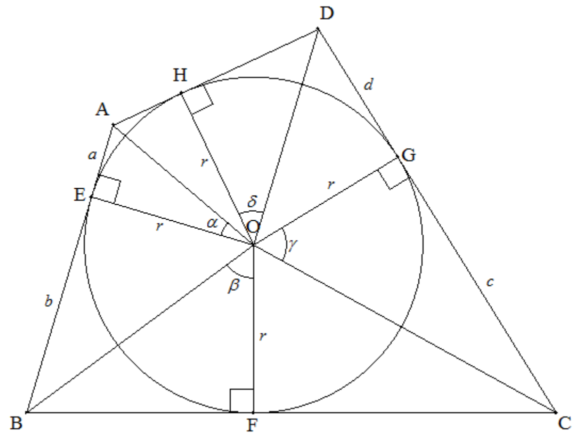
円に外接する四角形の面積の公式



四角形 ABCD の内接円と AB，BC，CD，DA との接点をそれぞれ E，F，G，H とする。
AE＝a，EB＝b，CG＝c，GD＝d として，四角形 ABCD の面積を考える。

（解）円の中心を O，半径を r とおく。

∠AOE=α，∠BOF＝β，∠COG=γ，∠DOH=δ とおくと，



$$
\begin{aligned}
&\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}},\cos\alpha=\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}},\\
&\sin\beta=\frac{b}{\sqrt{r^2+b^2}},\cos\beta=\frac{r}{\sqrt{r^2+b^2}},\\
&\sin\gamma=\frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}},\cos\gamma=\frac{r}{\sqrt{r^2+c^2}},\\
&\sin\delta=\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}},\cos\delta=\frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}
\end{aligned}
\qquad \cdots ①
$$

である。

また，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=180°$ であるから　$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\gamma+\delta)$

加法定理より　$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin\gamma\cos\delta+\cos\gamma\sin\delta$

これに①を代入すると

$$\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}\times\frac{r}{\sqrt{r^2+b^2}}+\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\times\frac{b}{\sqrt{r^2+b^2}}=\frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}}\times\frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}+\frac{r}{\sqrt{r^2+c^2}}\times\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}}$$

両辺に $\dfrac{\sqrt{r^2+a^2}\sqrt{r^2+b^2}\sqrt{r^2+c^2}\sqrt{r^2+d^2}}{r}$ をかけると

$$(a+b)\sqrt{r^2+c^2}\sqrt{r^2+d^2}=(c+d)\sqrt{r^2+a^2}\sqrt{r^2+b^2}\qquad\cdots ②$$

両辺を平方して左辺に移項すると

$$(a+b)^2(r^2+c^2)(r^2+d^2)-(c+d)^2(r^2+a^2)(r^2+b^2)=0$$

r について整理すると

$$\{(a+b)^2-(c+d)^2\}r^4+\{(a+b)^2(c^2+d^2)-(c+d)^2(a^2+b^2)\}r^2+\{(a+b)^2c^2d^2-(c+d)^2a^2b^2\}=0$$

$$
\begin{aligned}
&\{(a+b)+(c+d)\}\{(a+b)-(c+d)\}r^4+\{2ab(c^2+d^2)-2cd(a^2+b^2)\}r^2\\
&\qquad+\{(a+b)cd+(c+d)ab\}\{(a+b)cd-(c+d)ab\}=0
\end{aligned}
$$

r^2 についての２次式とみて，たすきがけを考える

$$
\begin{array}{lll}
(a+b)+(c+d) & & -ab(c+d)-cd(a+b)\to -ab(a+b)(c+d)-cd(a+b)^2\\
& & \qquad\qquad +ab(c+d)^2+cd(a+b)(c+d)\\
(a+b)-(c+d) & & ab(c+d)-cd(a+b)\to ab(a+b)(c+d)-cd(a+b)^2\\
& & \qquad +\qquad +ab(c+d)^2-cd(a+b)(c+d)\\
\hline
& & \qquad 2ab(c^2+d^2)-2cd(a^2+b^2)
\end{array}
$$

因数分解すると

$$\left[(a+b+c+d)r^2-\{ab(c+d)+cd(a+b)\}\right]\left[(a+b-c-d)r^2+\{ab(c+d)-cd(a+b)\}\right]=0$$

［1］$a+b=c+d$ のとき

$$r^2=\frac{ab(c+d)+cd(a+b)}{a+b+c+d}$$

［2］$a+b\neq c+d$ のとき

$$r^2=\frac{ab(c+d)+cd(a+b)}{a+b+c+d},-\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{a+b-(c+d)}$$

いずれにしても，$r^2>0$，　$r>0$ より　$r=\sqrt{\dfrac{ab(c+d)+cd(a+b)}{a+b+c+d}}$　…③

よって　四角形 ABCD の面積を S とおくと

S＝△OAB+△OBC+△OCD+△ODA

$=\frac{1}{2}r\,\mathrm{AB}+\frac{1}{2}r\,\mathrm{BC}+\frac{1}{2}r\,\mathrm{CD}+\frac{1}{2}r\,\mathrm{DA}=\frac{1}{2}r\,(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DA})$

$=\frac{1}{2}r\{(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)\}=(a+b+c+d)r$

$=(a+b+c+d)\sqrt{\dfrac{ab(c+d)+cd(a+b)}{a+b+c+d}}$　（③を代入）

$=\sqrt{(a+b+c+d)\{(a+b)cd+ab(c+d)\}}=\sqrt{(AB+CD)(ABcd+abCD)}$　…④

$=\sqrt{(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)}$　…⑤

円に外接する四角形の面積の公式　$S=\sqrt{(AB+CD)(ABcd+abCD)}$

この公式は，特に文献を見ないで作成した。どこかに掲載されているだろうか。また，公式はアルファベット順に ABCD，ABcd，abCD と現れているので，覚えやすい。

また，今回の計算の副産物として，②より，

円 O に外接する四角形 ABCD について　AB・OC・OD＝CD・OA・OB

という性質が発見できた。

（例題）

四角形 ABCD の内接円と AB，BC，CD，DA との接点をそれぞれ E，F，G，H とする。AE＝1，EB＝3，CG＝4，GD＝2 のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。

（解）公式 S＝$\sqrt{(AB+CD)(ABcd+abCD)}$ において，

$a=1, b=3, c=4, d=2, AB=1+3=4, CD=4+2=6$ の場合であるから

S＝$\sqrt{(4+6)(4\times4\times2+1\times3\times6)}=\sqrt{10\times50}=10\sqrt{5}$　…（答）

（補足）⑤の形の面積の公式は a,b,c,d についての対称式であるから，
$a=1, b=3, c=4, d=2$ の長さの順番を変えても面積は変わらない。（③で求められる内接円の半径も変わらない。）

（応用問題）

4 次方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 4 つの解を $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ とすると，解と係数の関係から，
$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-a, \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-c$ である。これを踏まえて，⑤から

四角形 ABCD の内接円と AB，BC，CD，DA との接点をそれぞれ E，F，G，H とする。4 次方程式 $x^4-10x^3+35x^2-49x+21=0$ は 4 つの正の解 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を持つことが知られていて，α ＝AE，β ＝EB，γ ＝CG，δ ＝GD であるとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。

（答．$\sqrt{10\times49}=7\sqrt{10}$ ）

（2016/12/12　時岡）