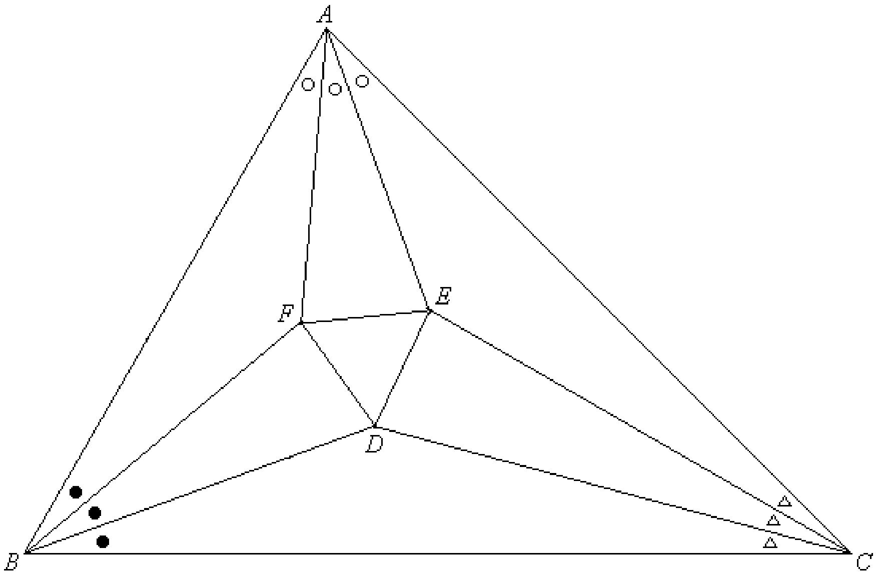
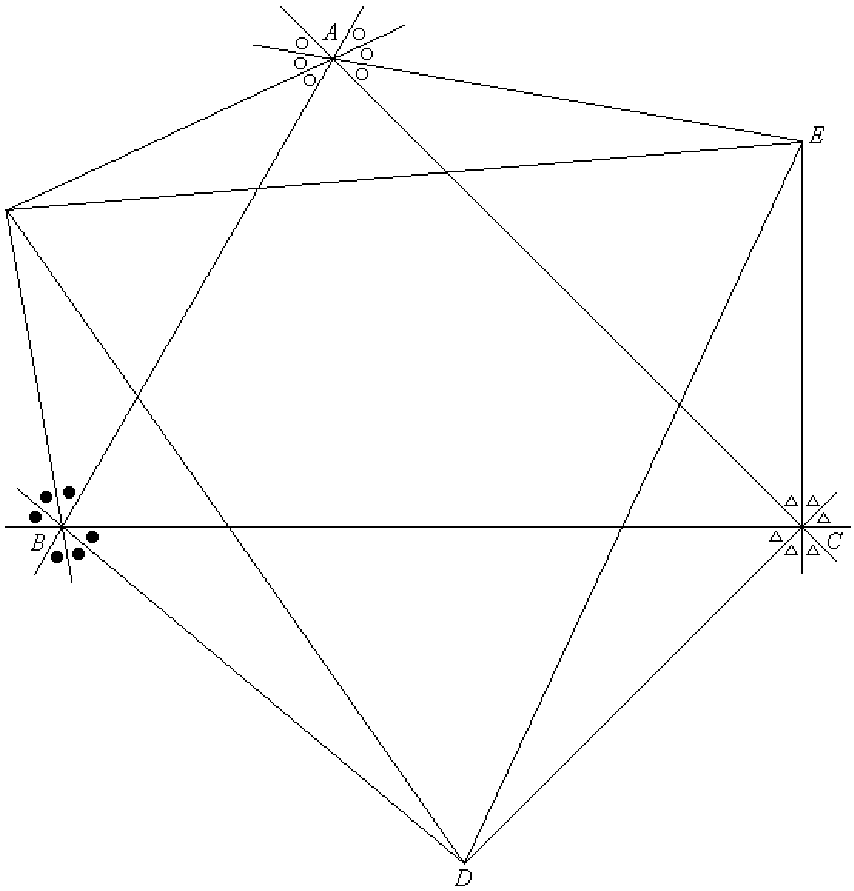
（F.Morley の定理）

三角形 ABC の頂角の 3 等分線の辺に近い 2 つずつの線分の交点 D，E，F は正三角形を作る。また，外角の 3 等分線でも同様に正三角形を作る。



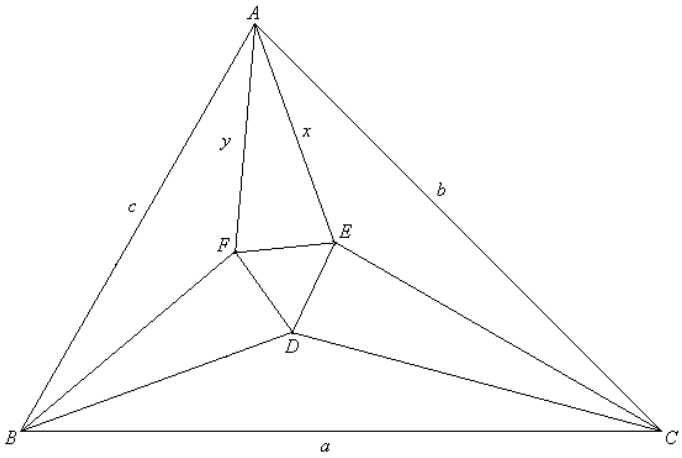


【証明】 $AE = x, AF = y$ とおく。

⊿AEC に正弦定理を適用すると，

$$\frac{x}{\sin\frac{C}{3}} = \frac{b}{\sin\frac{A+C}{3}}$$ より

$$x = \frac{b\sin\frac{C}{3}}{\sin\left(60^\circ - \frac{B}{3}\right)}$$



ここで，

$$b = 2R\sin B = 2R\left(3\sin\frac{B}{3} - 4\sin^3\frac{B}{3}\right) = 2R\sin\frac{B}{3}\left(3 - 4\sin^2\frac{B}{3}\right) = 2R\sin\frac{B}{3}\left(2\cos\frac{2B}{3} + 1\right)$$

$$= 4R\sin\frac{B}{3}\left(\cos\frac{2B}{3} - \cos 120^\circ\right) = 8R\sin\frac{B}{3}\sin\left(60^\circ + \frac{B}{3}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{B}{3}\right)$$

であるから

$$x = 8R\sin\frac{B}{3}\sin\left(60^\circ + \frac{B}{3}\right)\sin\frac{C}{3} = 8R\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\sin\left(60^\circ + \frac{B}{3}\right)$$

同様にして

$$y = 8R\sin\frac{C}{3}\sin\left(60^\circ + \frac{C}{3}\right)\sin\frac{B}{3} = 8R\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\sin\left(60^\circ + \frac{C}{3}\right)$$

⊿AFE に余弦定理を適用すると，

$$EF^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{A}{3}$$

$$= \left(8R\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\right)^2\left\{\sin^2\left(60^\circ + \frac{B}{3}\right) + \sin^2\left(60^\circ + \frac{C}{3}\right) - 2\sin\left(60^\circ + \frac{B}{3}\right)\sin\left(60^\circ + \frac{C}{3}\right)\cos\frac{A}{3}\right\}$$

｛　｝の中を計算すると

$$\frac{1}{2}\left\{1 - \cos\left(120^\circ + \frac{2B}{3}\right) + 1 - \cos\left(120^\circ + \frac{2C}{3}\right)\right\} + \left\{\cos\left(120^\circ + \frac{B+C}{3}\right) - \cos\frac{B-C}{3}\right\}\cos\frac{A}{3}$$

$$= 1 - \cos\left(120^\circ + \frac{B+C}{3}\right)\cos\frac{B-C}{3} + \left\{\cos\left(120^\circ + \frac{B+C}{3}\right) - \cos\frac{B-C}{3}\right\}\cos\frac{A}{3}$$

ここで， $\cos\left(120^\circ + \frac{B+C}{3}\right) = \cos\left(180^\circ - \frac{A}{3}\right) = -\cos\frac{A}{3}$ であるから

上の式は

$$1 + \cos\frac{A}{3}\cos\frac{B-C}{3} - \cos^2\frac{A}{3} - \cos\frac{A}{3}\cos\frac{B-C}{3} = \sin^2\frac{A}{3}$$

よって　 $EF = 8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}$

この式は A，B，C について対称式であるから，DE，DF についても変わらない。

∴　$DE=EF=FD$ より，⊿DEF は正三角形となる。

（2011/3/14）

【外角の 3 等分線の場合】

同様に，$AE=x, AF=y$ とおく。

⊿AEC に正弦定理を適用すると，

$$\frac{x}{\sin\frac{180^\circ-C}{3}}=\frac{b}{\sin\left\{180^\circ-\left(\frac{180^\circ-A}{3}+\frac{180^\circ-C}{3}\right)\right\}} \quad \text{より} \quad x=\frac{b\sin\left(60^\circ-\frac{C}{3}\right)}{\sin\left(120^\circ-\frac{B}{3}\right)}$$

ここで，

$$b=8R\sin\frac{B}{3}\sin\left(60^\circ+\frac{B}{3}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{B}{3}\right)=8R\sin\frac{B}{3}\sin\left(120^\circ-\frac{B}{3}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{B}{3}\right)$$

であるから

$$x=8R\sin\frac{B}{3}\sin\left(60^\circ-\frac{B}{3}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{C}{3}\right)$$

同様にして

$$y=8R\sin\frac{C}{3}\sin\left(60^\circ-\frac{C}{3}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{B}{3}\right)$$

⊿AFE に余弦定理を適用すると，

$$EF^2=x^2+y^2-2xy\cos\left(A+2\cdot\frac{180^\circ-A}{3}\right)$$

$$=\left\{8R\sin\left(60^\circ-\frac{B}{3}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{C}{3}\right)\right\}^2\left\{\sin^2\frac{B}{3}+\sin^2\frac{C}{3}+2\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\cos\left(60^\circ-\frac{A}{3}\right)\right\}$$

後ろの｛　｝の中を計算すると

$$\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2B}{3}+1-\cos\frac{2C}{3}\right)-\left(\cos\frac{B+C}{3}-\cos\frac{B-C}{3}\right)\cos\left(60^\circ-\frac{A}{3}\right)$$

$$=1-\cos\frac{B+C}{3}\cos\frac{B-C}{3}-\cos^2\left(60^\circ-\frac{A}{3}\right)+\cos\frac{B+C}{3}\cos\frac{B-C}{3}$$

$$=\sin^2\left(60^\circ-\frac{A}{3}\right)$$

よって　$EF=8R\sin\left(60^\circ-\frac{A}{3}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{B}{3}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{C}{3}\right)$

この式は A，B，C について対称式であるから，DE，DF についても変わらない。
∴　$DE=EF=FD$ より，⊿DEF は正三角形となる。

（2011/3/16　時岡）

（参考文献：岩田至康編　幾何学大辞典 1　槇書店）