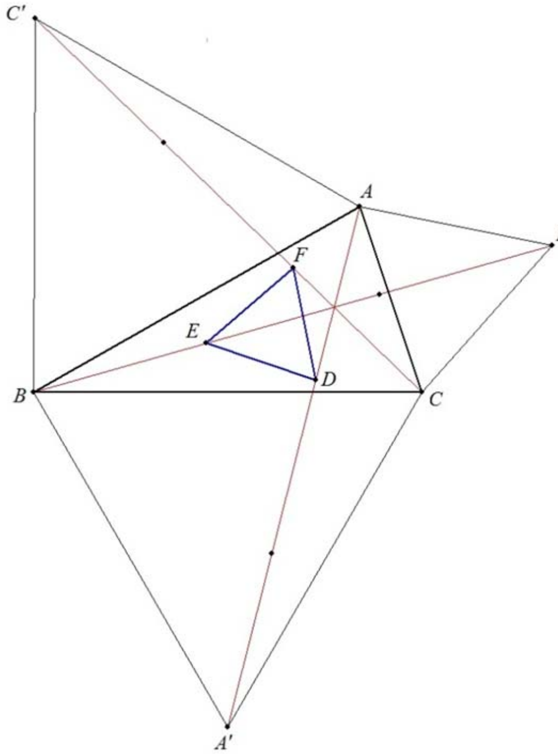
三角形の各辺上に正三角形(1)

ΔABC の各辺上に正三角形を外側に作り，その第 3 頂点を A', B', C' とし， AA', BB', CC' の 3 等分点のうち A, B, C に近い方の点をそれぞれ D, E, F とすると， ΔDEF は正三角形となる。



（証明）

A'' を AA' の３等分点の A' に近い方の点とすれば，

$\Delta ABA' \equiv \Delta C'BC$ （B の周りに $60°$ 回転）

$\therefore \quad BA'' = BF$，$\angle A''BF = 60°$

よって $\Delta A''BF$ は正三角形

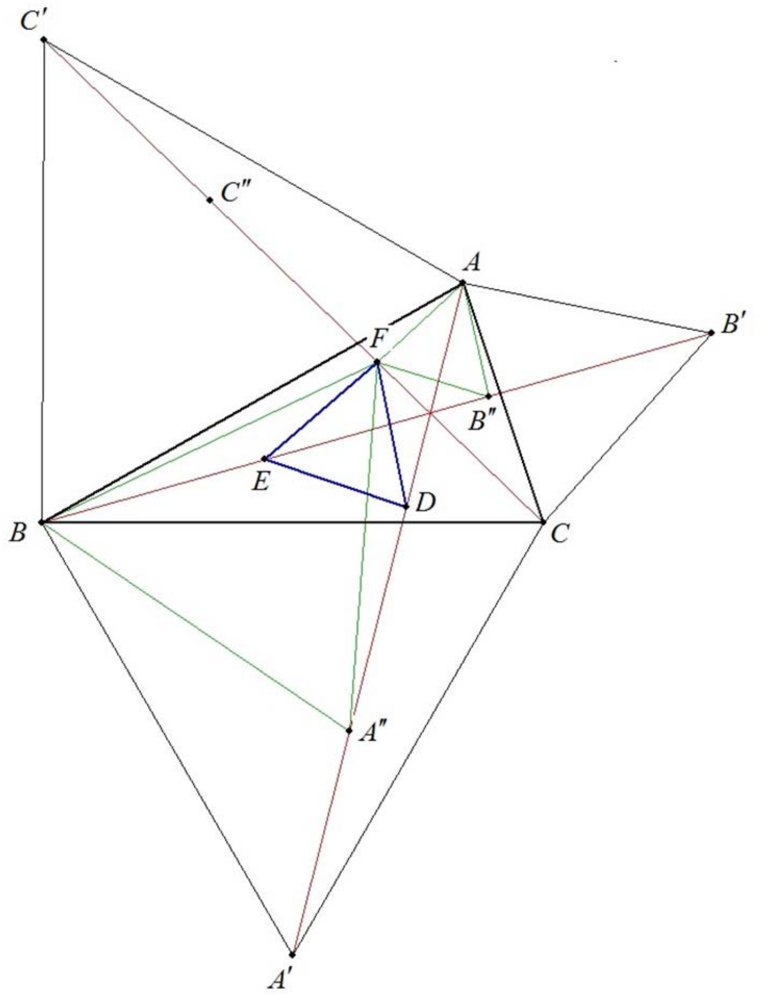
同様にして $\Delta AB''F$ も正三角形となる。

よって，F の周りに $60°$ 回転すれば

$\Delta FA''A \equiv \Delta FBB''$

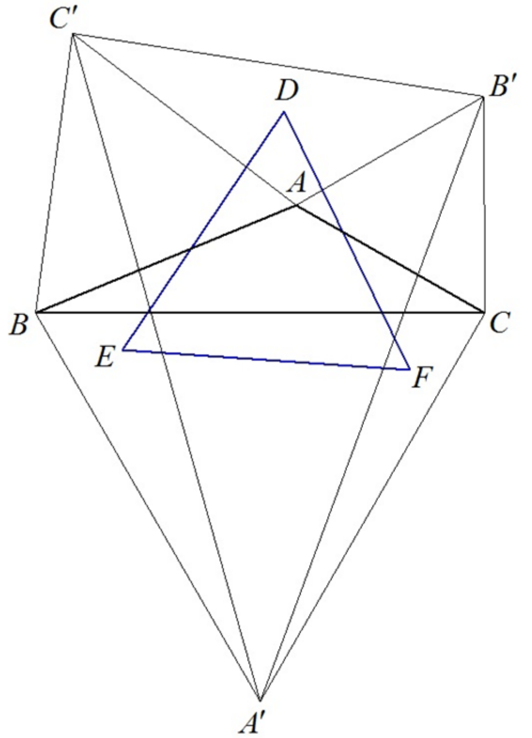
$\therefore \quad FD = FE$，$\angle DFE = 60°$

ゆえに ΔDEF も正三角形となる。



三角形の各辺上に正三角形(2)

ΔABC の各辺上に正三角形を外側に作り，その第３頂点を A', B', C' とし，$\Delta AB'C', \Delta BC'A', \Delta CA'B'$ の重心をそれぞれ D, E, F とすると，ΔDEF は正三角形となる。

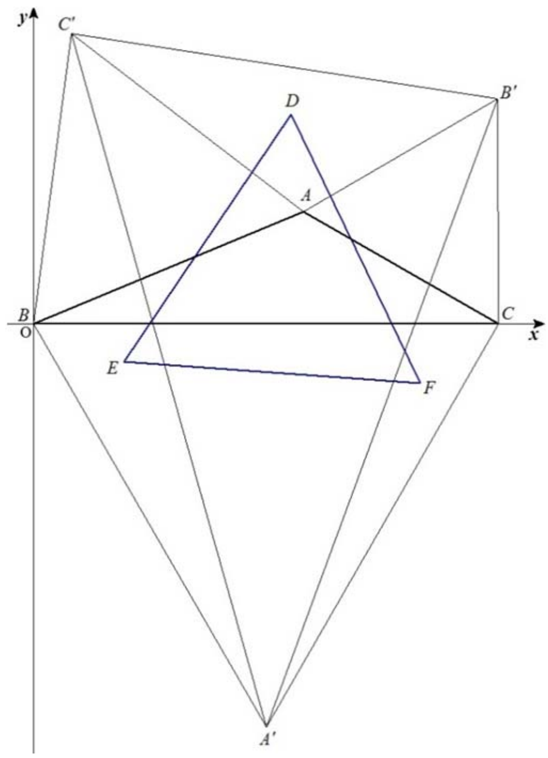


（証明）

座標平面上で，ΔABC の頂点の座標を $A(p,q), B(0,0), C(a,0)$ とおく。

点 A' は点 C を原点中心に $-60°$ 回転させた点で，同様に，点 B' は点 C を点 A 中心に $60°$ 回転させた点，点 C' は点 A を原点中心に $60°$ 回転させた点であるから，

$$A'\left(\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{3}a}{2}\right), B'\left(\frac{a+p+\sqrt{3}q}{2},\frac{\sqrt{3}(p-a)+q}{2}\right), C'\left(\frac{p-\sqrt{3}q}{2},\frac{\sqrt{3}p+q}{2}\right)$$ となる。



D, E, F はそれぞれ $\Delta AB'C', \Delta BC'A', \Delta CA'B'$ の重心であるから，

$$D\left(\frac{a+4p}{6},\frac{\sqrt{3}a+4q}{6}\right), E\left(\frac{a+p-\sqrt{3}q}{6},\frac{\sqrt{3}(p-a)+q}{6}\right),$$

$$F\left(\frac{4a+p+\sqrt{3}q}{6},\frac{-\sqrt{3}p+q}{6}\right)$$

となる。

このとき，

$$DE=\sqrt{\left(\frac{a+p-\sqrt{3}q}{6}-\frac{a+4p}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}(p-a)+q}{6}-\frac{\sqrt{3}a+4q}{6}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2+p^2+q^2-ap+\sqrt{3}aq}{3}}$$

同様に， $EF=FD=\sqrt{\dfrac{a^2+p^2+q^2-ap+\sqrt{3}aq}{3}}$

となるので ΔDEF は正三角形となる。

（別証明）

複素平面上で $A(a), B(b), C(c), A'(a'), B'(b'), C'(c')$ とおく。

$\Delta AB'C'$ の重心を $D(d)$ とすれば

$3d=a+b'+c'$

ところが

$b'+\omega a+\omega^2 c=0, c'+\omega b+\omega^2 a=0$

であるから

$3d=a-(\omega a+\omega^2 c)-(\omega b+\omega^2 a)=2a-\omega b-\omega^2 c$

同様に $\Delta BC'A', \Delta CA'B'$ の重心をそれぞれ $E(e), F(f)$ とすれば

$3e=2b-\omega c-\omega^2 a, 3f=2c-\omega a-\omega^2 b$

となるから

$3(d+\omega e+\omega^2 f)$

$=(2a-\omega b-\omega^2 c)+\omega(2b-\omega c-\omega^2 a)+\omega^2(2c-\omega a-\omega^2 b)$

$=(2a-2\omega^3)a+(\omega-\omega^4)b+(-2\omega^3+2)c$

$=0$

$\therefore \quad d+\omega e+\omega^2 f=0$

よって 3 点 $D(d), E(e), F(f)$ は正三角形を作る。

（2011/9/6　時岡）