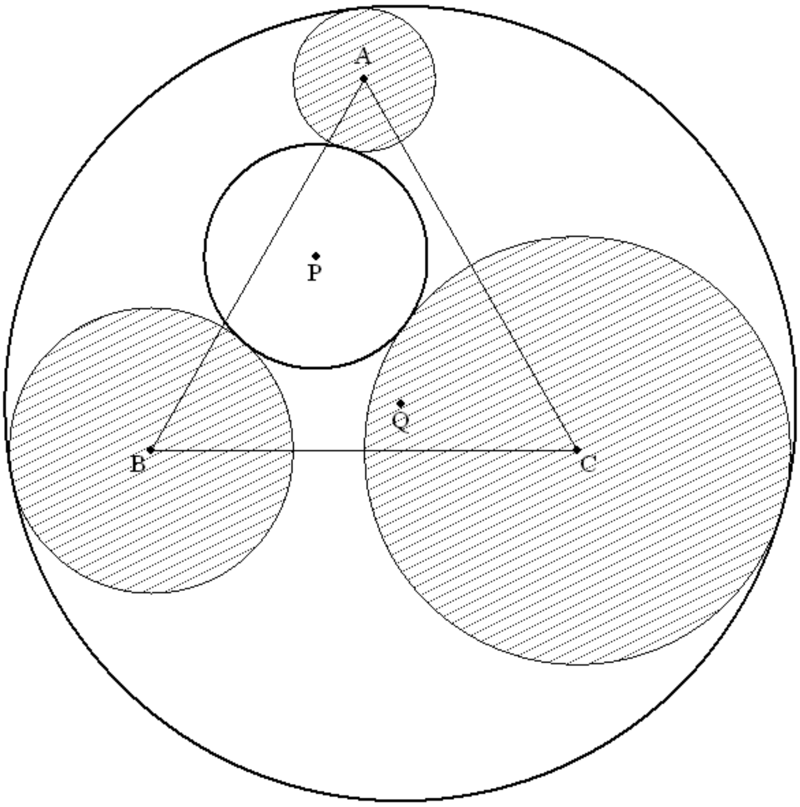
■互いに共有点をもたない３つの円に外接及び内接する円について

立命館慶祥中学校・高等学校　時岡郁夫

n を正の整数とし，一辺の長さが $(2n+4)$ の正三角形 ABC がある。頂点 A を中心とする半径 n の円，頂点 B を中心とする半径 $(n+1)$ の円，頂点 C を中心とする半径 $(n+2)$ の円について，次の問いに答えよ。

⑴　３つの円に外接する円 P の半径 r を求めよ。

⑵　３つの円を内接する円 Q の半径 R を求めよ。



（解）$A\left(n+2,(n+2)\sqrt{3}\right), B(0,0), C(2n+4,0)$ とし，座標平面で考える。

⑴　円 P の中心を (x,y)，半径を r とする。

$AP=r+n, BP=r+n+1, CP=r+n+2$ であるから

$$\begin{cases} (x-(n+2))^2+\left(y-(n+2)\sqrt{3}\right)^2=(r+n)^2 \\ x^2+y^2=(r+n+1)^2 \\ (x-(2n+4))^2+y^2=(r+n+2)^2 \end{cases}$$

これらを連立させて解くと

$$x=\frac{(2n+3)(2n+5)\left\{3(n+1)(n+3)-\sqrt{3(n+1)(n+3)}\right\}}{12(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$y=\frac{(2n+3)(2n+5)\left\{(n+1)(n+3)+\sqrt{3(n+1)(n+3)}\right\}}{4\sqrt{3}(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$r=\frac{-6(n+1)^2(n+3)+(2n+3)(2n+5)\sqrt{3(n+1)(n+3)}}{6(n+1)(n+3)}$$

⑵　円Pの中心を(x, y)，半径をRとする。

$AQ=R-n, BQ=R-n-1, CQ=R-n-2$ であるから

$$\begin{cases}\left(x-(n+2)\right)^2+\left(y-(n+2)\sqrt{3}\right)^2=(R-n)^2\\ x^2+y^2=(R-n-1)^2\\ \left(x-(2n+4)\right)^2+y^2=(R-n-2)^2\end{cases}$$

これらを連立させて解くと

$$x=\frac{(2n+3)(2n+5)\left\{3(n+1)(n+3)+\sqrt{3(n+1)(n+3)}\right\}}{12(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$y=\frac{(2n+3)(2n+5)\left\{(n+1)(n+3)-\sqrt{3(n+1)(n+3)}\right\}}{4\sqrt{3}(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$R=\frac{6(n+1)^2(n+3)+(2n+3)(2n+5)\sqrt{3(n+1)(n+3)}}{6(n+1)(n+3)}$$

【具体例】

$\boxed{n=1\text{のとき}}$　$P\left(\frac{35\left(12-\sqrt{6}\right)}{144}, \frac{35\left(3\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)}{144}\right), r=\frac{-48+35\sqrt{6}}{24}=1.57217$

$Q\left(\frac{35\left(12+\sqrt{6}\right)}{144}, \frac{35\left(-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)}{144}\right), R=\frac{48+35\sqrt{6}}{24}=5.57217$

$\boxed{n=2\text{のとき}}$　$P\left(\frac{21\left(15-\sqrt{5}\right)}{80}, \frac{21\left(5\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)}{80}\right), r=\frac{3\left(-10+7\sqrt{5}\right)}{10}=1.69574$

$Q\left(\frac{21\left(15+\sqrt{5}\right)}{80}, \frac{21\left(5\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)}{80}\right), R=\frac{3\left(10+7\sqrt{5}\right)}{10}=7.69574$

$\boxed{n=3\text{のとき}}$　$P\left(\frac{33\left(12-\sqrt{2}\right)}{80}, \frac{33\left(4\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}{80}\right), r=\frac{-32+33\sqrt{2}}{8}=1.83363$

$Q\left(\frac{33\left(12+\sqrt{2}\right)}{80}, \frac{33\left(4\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}{80}\right), R=\frac{32+33\sqrt{2}}{8}=9.83363$

(2011.2.28)

（補足）半径r, Rが有理数になるためには，$\sqrt{3(n+1)(n+3)}$が有理数になればよい。そのようなnの例を示す。

$n=5,24,95,360,1349,5040,18815,70224$ など

特に$n=5$のとき，$r=\frac{17}{8}, R=\frac{113}{8}$

(2011.6.8)