空間座標における四面体の体積について

1　はじめに

次の問題は，2007 大阪教育大の入試問題である。

座標空間において，3 点 A(0，−1，2)，B(−1，0，5)，C(1，1，3) の定める平面を α とし，原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす。 (1)　△ABC の面積を求めよ。 (2)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす s，t を求めよ。 (3)　点 H の座標を求めよ。 (4)　四面体 OABC の体積を求めよ。

この問題のように，空間座標における四面体の体積を求める手順は面倒である。

2　四面体の体積の公式

同一平面上にない 4 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$，$\mathrm{B}(x_2,y_2,z_2)$，$\mathrm{C}(x_3,y_3,z_3)$を頂点とする四面体 O-ABC の体積を求めよ。

（解）$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$である。

平面 ABC の法線ベクトルを，$\vec{n}=(a,b,c)$とおくと，$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB},\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ であるから

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)=0\cdots①$$
$$a(x_3-x_1)+b(y_3-y_1)+c(z_3-z_1)=0\cdots②$$

①×(z_3-z_1)－②×(z_2-z_1)を計算すると

$$a\{(x_2-x_1)(z_3-z_1)-(x_3-x_1)(z_2-z_1)\}+b\{(y_2-y_1)(z_3-z_1)-(y_3-y_1)(z_2-z_1)\}=0$$

行列式を用いて書き変えると　$a\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1\\ z_2-z_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}y_2-y_1 & y_3-y_1\\ z_2-z_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$

$$a:b=\begin{vmatrix}y_2-y_1 & y_3-y_1\\ z_2-z_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}:\left(-\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1\\ z_2-z_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}y_2-y_1 & y_3-y_1\\ z_2-z_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}z_2-z_1 & z_3-z_1\\ x_2-x_1 & x_3-x_1\end{vmatrix}\cdots③$$

同様に，①×(y_3-y_1)－②×(y_2-y_1)を計算すると

$$a\{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\}+c\{(z_2-z_1)(y_3-y_1)-(z_3-z_1)(y_2-y_1)\}=0$$

行列式を用いて書き変えると

$$a\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1\\ y_2-y_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}z_2-z_1 & z_3-z_1\\ y_2-y_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}=0$$

$$a:c=\left(-\begin{vmatrix} z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right):\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\cdots④$$

③，④より

$$a:b:c=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ x_2-x_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{n}=\left(\begin{vmatrix} y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ x_2-x_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right)$$

よって　平面ABCの方程式は

$$\begin{vmatrix} y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}(x-x_1)+\begin{vmatrix} z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ x_2-x_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}(y-y_1)+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}(z-z_1)=0\cdots⑤$$

とかける。

原点Oと平面⑤との距離dは

$$d=\frac{\left|x_1\begin{vmatrix} y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}+y_1\begin{vmatrix} z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ x_2-x_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ x_2-x_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}}\cdots⑥$$

また，△ABC＝Sとおくと　$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}$

ここで，$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)+(z_2-z_1)(z_3-z_1)$であるから，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\}\{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2\}-\{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)+(z_2-z_1)(z_3-z_1)\}^2}\cdots⑦$$

次に，⑥の分母の根号内と⑦の根号内が等しいことを証明する。

いま，$x_2-x_1=a_1, y_2-y_1=a_2, z_2-z_1=a_3, x_3-x_1=b_1, y_3-y_1=b_2, z_3-z_1=b_3$とおく。

（⑥の分母の根号内）$=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$=a_2^2b_3^2-2a_2a_3b_2b_3+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2-2a_1a_3b_1b_3+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2$$

$=a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2-2a_2a_3b_2b_3-2a_1a_3b_1b_3=\Sigma$とおくと，

（⑦の根号内）$=\left(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2\right)\left(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2$

$=a_1{}^2b_2{}^2+a_1{}^2b_3{}^2+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_3{}^2+a_3{}^2b_1{}^2+a_3{}^2b_2{}^2-2a_1a_2b_1b_2-2a_2a_3b_2b_3-2a_1a_3b_1b_3=\Sigma$ となる。

また，

（⑥の分子の絶対値の中）

$=x_1\{(y_2-y_1)(z_3-z_1)-(y_3-y_1)(z_2-z_1)\}+y_1\{(z_2-z_1)(x_3-x_1)-(z_3-z_1)(x_2-x_1)\}$

$+z_1\{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\}$

$=x_1\{(y_2-y_1)(z_3-z_1)-(y_3-y_1)(z_2-z_1)\}+(x_2-x_1)\{z_1(y_3-y_1)-y_1(z_3-z_1)\}$

$+(x_3-x_1)\{y_1(z_2-z_1)-z_1(y_2-y_1)\}$

$=x_1\{(y_2-y_1)(z_3-z_1)-(y_3-y_1)(z_2-z_1)-z_1(y_3-y_1)+y_1(z_3-z_1)-y_1(z_2-z_1)+z_1(y_2-y_1)\}$

$+x_2\{z_1(y_3-y_1)-y_1(z_3-z_1)\}+x_3\{y_1(z_2-z_1)-z_1(y_2-y_1)\}$

$=x_1(y_2z_3-y_3z_2)+x_2(y_3z_1-y_1z_3)+x_3(y_1z_2-y_2z_1)$

$=x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-(x_1y_3z_2+x_2y_1z_3+x_3y_2z_1)$

$=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ と表すことができる。

従って，四面体 O-ABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}Sd=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\sqrt{\Sigma}\times\frac{\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{\Sigma}}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{6}\left|x_1(y_2z_3-y_3z_2)+x_2(y_3z_1-y_1z_3)+x_3(y_1z_2-y_2z_1)\right|\cdots(\text{答})$$

3　補足

(1)　4 点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，$C(x_3,y_3,z_3)$，$D(x_4,y_4,z_4)$ を頂点に持つ四面体の体積は，頂点 D が原点に来るように平行移動すれば，四面体の体積の公式を用いて，$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{matrix}\right\|$ と求められる。

(2)　平面上で，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ とおくとき，$\triangle OAB$ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(x_1{}^2+y_1{}^2\right)\left(x_2{}^2+y_2{}^2\right)-\left(x_1x_2+y_1y_2\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$$

となる。行列式を用いて表すと $S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right\|$ となり，空間における四面体の体積の公式

$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\right\|$ が覚えやすい。

4　おわりに

参考文献［1］の問題（設問）を参考にして，上記のとおり文字計算をしました。冒頭の大阪教育大の入試問題の設問どおり文字計算をすると，とても大変でした。

また，結果がとてもきれいな式なので，別の方法で簡単に求められるのではないかと調べると，ベクトルの外積を利用すると（高校では習わない）簡単に求められることが分かりました。

求める体積は，平行六面体の体積の $\frac{1}{6}$，すなわち，$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\right\|$

であると。（参考文献［2］，［3］）

また，参考文献［2］によると，四面体 $O-ABC$ において，

$OA=a, OB=b, OC=c, BC=l, CA=m, AB=n$，体積を V とおくと，

$$\begin{aligned}(12V)^2 &= a^2l^2\left(-a^2+b^2+c^2-l^2+m^2+n^2\right)+b^2m^2\left(a^2-b^2+c^2+l^2-m^2+n^2\right) \\ &\quad +c^2n^2\left(a^2+b^2-c^2+l^2+m^2-n^2\right)-l^2b^2c^2-a^2m^2c^2-a^2b^2n^2-l^2m^2n^2\end{aligned}$$

となる計算結果も掲載されていて，とても勉強になりました。

【参考文献】

［1］問題解法　ベクトル・行列辞典　聖文社編（平成 5 年 7 月 20 日初版第 1 刷）P.275　817 番

［2］四面体の体積の公式について　村崎武明著（群馬大学教育学部紀要 自然科学編 第 51 巻 19-34 項，2003）

［3］怜悧玲瓏　～高校数学を天空から俯瞰する～　http://blog.livedoor.jp/ddrerizayoi/

（7/27）ベクトルの外積３　平行六面体の体積とスカラー三重積

（2015/1/21　時岡）